# RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 1 ORDINAMENTO

**Punto 1**: Andiamo a studiare la funzione (cubica) $f(x) = 2x - 3x^3$.

*Dominio*: **R**

*Eventuali simmetrie*: la funzione è dispari (simmetrica rispetto all'origine).

*Intersezioni con gli assi*: L'unica intersezione con l'asse $y$ è $y=0$; per le intersezioni con l'asse $x$ si ha: $2x - 3x^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}};\ x_3 = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow$ si hanno i punti $O(0;0)$, $A\left(-\frac{\sqrt{6}}{3};0\right)$ e $B\left(\frac{\sqrt{6}}{3};0\right)$

*Studio del segno:* $2x - 3x^3 > 0 \Rightarrow x(2-3x^2) > 0$ e quindi risulta $f(x)>0$ per $x < -\frac{\sqrt{6}}{3} \vee 0 < x < \frac{\sqrt{6}}{3}$

*Comportamento agli estremi del dominio:* $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = \lim_{x\to\mp\infty} -x^3\left(3 - \frac{2}{x^2}\right) = \pm\infty$

*Eventuali asintoti*: la funzione, algebrica razionale intera, non ha asintoti di alcun genere.

*Derivata prima*: $f'(x) = 2 - 9x^2 \Rightarrow f'(x) = 0$ per $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{3}$

*Crescita e decrescita*:

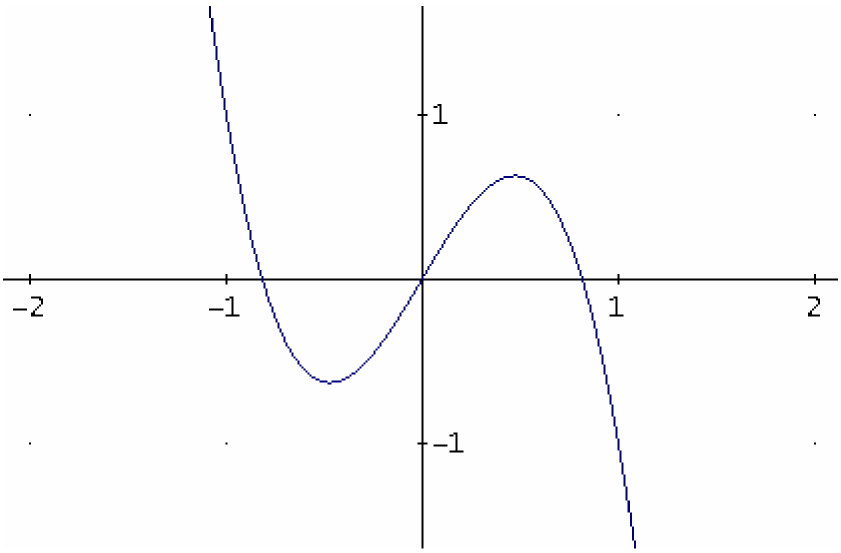
$f'(x) > 0$ per $-\frac{\sqrt{2}}{3} < x < \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow m\left(-\frac{\sqrt{2}}{3};f\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)$ e $M\left(\frac{\sqrt{2}}{3};f\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{9}\right)$ massimo relativo.

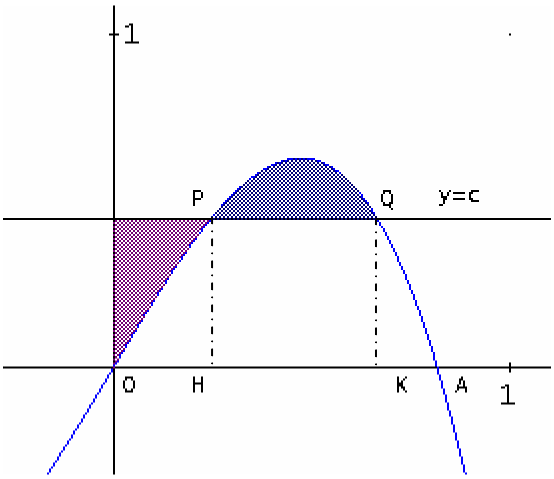
*Derivata seconda:* $f''(x) = 18x$ che si annulla per.

*Concavità e convessità:*

$f''(x) = 18x > 0$ per $x>0 \Rightarrow O(0;0)$ punto di flesso.

il grafico $G$ di $f$ è riportato a lato.




**Punto 2:**

La retta $y=c$, con $0 < c < \frac{4\sqrt{2}}{9}$ interseca la curva in due punti distinti $(x_1;c)$ e $(x_2;c)$ del primo quadrante.

Determiniamo le aree delle regioni $R$ e $S$ indicate dalla traccia e imponiamo che esse siano uguali; abbiamo:

Indicate con $P(h;c)$ e $Q(k;c)$ le intersezioni della curva con $y=c$, con c, h, k positivi, si ha:

$A(R) = \int_0^h (c - f(x))dx$ ed $A(S) = \int_h^k (f(x) - c)dx$, da cui $A(R) = A(S) \Rightarrow$

$$\int_0^h (c - f(x))dx = \int_h^k (f(x) - c)dx \Rightarrow \int_0^h (c - f(x))dx - \int_h^k (f(x) - c)dx = 0$$

e per le proprietà degli integrali definiti $\Rightarrow$

$$\int_0^h (c - f(x))dx - \int_h^k (f(x) - c)dx = \int_0^h (c - f(x))dx + \int_h^k (c - f(x))dx = \int_0^k (c - f(x))dx = 0$$ e infine

$\int_0^k (c - f(x))dx = \int_0^k (c - 2x + 3x^3)dx = \left[ cx - 2\frac{x^2}{2} + 3\frac{x^4}{4} \right]_0^k \Rightarrow ck - k^2 + \frac{3}{4}k^4 = 0$, che , essendo $k \neq 0$ si può scrivere $\frac{3}{4}k^3 - k + c = 0$ che rappresenta un'equazione di terzo grado in due incognite.

Siccome il punto $K$ appartiene alla curva ( $f(k) = c$ ), si avrà anche: $f(k) = 2k - 3k^3 = c$ e quindi possiamo impostare il sistema: $\begin{cases} \frac{3}{4}k^3 - k + c = 0 \\ 3k^3 - 2k + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3k^3 - 4k + 4c = 0 \\ 3k^3 - 2k + c = 0 \end{cases}$ e sottraendo termine a termine $\Rightarrow c = \frac{2}{3}k$ .

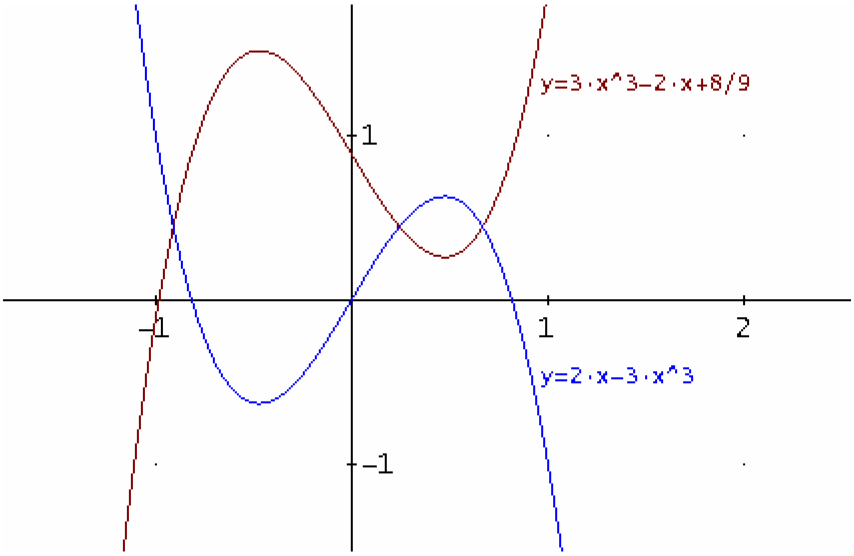
Sostituendo tale valore nella seconda equazione, dopo aver fatto il m.c.m. si ottiene: $9k^3 - 4k = 0$ e quindi $k = \frac{2}{3}$ ( $k = 0$ e $k = -\frac{2}{3}$ n.a.) e di conseguenza $c = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ .

Per trovare l'altra ascissa $h$, dovremo risolvere l'equazione: $2x - 3x^3 = \frac{4}{9} \Rightarrow 27x^3 - 18x + 4 = 0$ .

Applicando la Regola di Ruffini e ricordando che l'equazione si abbassa di grado per $x = k = \frac{2}{3}$ abbiamo:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 27 & 0 & -18 & 4 \\ \frac{2}{3} & & 18 & 12 & -4 \\ \hline & 27 & 18 & -6 & 0 \end{array} \Rightarrow \left( x - \frac{2}{3} \right)(27x^2 - 18x - 6) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \mp \sqrt{3}}{3}$$

con la soluzione negativa non accettabile. Si ha infine $x_2 = h = \frac{\sqrt{3} - 1}{3}$




**Punto 4:** Le equazioni della simmetria assiale avente per asse la retta $y = \frac{4}{9}$ sono: $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2\left(\frac{4}{9}\right) - y = \frac{8}{9} - y \end{cases}$, che coincidono con le inverse ; applicando la trasformazione (inversa) alla curva di equazione $f(x) = 2x - 3x^3$ otteniamo la sua simmetrica che, tralasciando gli apici, ha equazione:

$$y = 3x^3 - 2x + \frac{8}{9}.$$

I grafici sono riportati in figura.