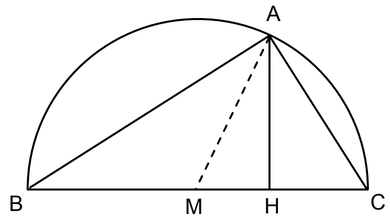
RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 2 ORDINAMENTO

PUNTO 1
Si ricorda dalla geometria piana che la mediana AM relativa all'ipotenusa BC del triangolo rettangolo ABC è congruente alla metà dell'ipotenusa BC, in quanto raggio della semicirconferenza circoscritta al triangolo stesso e quindi pari alla metà del diametro (ipotenusa).

PUNTO 2
Posto $\overline{BC} = a$ e $\overline{AH} = h$ ed indicati con b e c i cateti di cui occorre trovare l'espressione, si ha il sistema:



$$\begin{cases} b \cdot c = a \cdot h \\ b^2 + c^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{a \cdot h}{c} \\ \left(\dfrac{a \cdot h}{c}\right)^2 + c^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \begin{cases} b = \dfrac{a \cdot h}{c} \\ c^4 - a^2c^2 + a^2h^2 = 0 \end{cases}$$

e risolvendo la seconda equazione (biquadratica) si ottiene:
$c^2 = \dfrac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 4a^2h^2}}{2} \Rightarrow c = \pm\sqrt{\dfrac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 4a^2h^2}}{2}}$ dove le soluzioni precedute dal segno meno non sono accettabili.
Ricordando le formule dei radicali doppi:

$$c = \sqrt{\frac{a^2 \pm \sqrt{a^4 - 4a^2h^2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{a^2 + \sqrt{a^4 - a^4 + 4a^2h^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a^2 - \sqrt{a^4 - a^4 + 4a^2h^2}}{2}}\right)$$

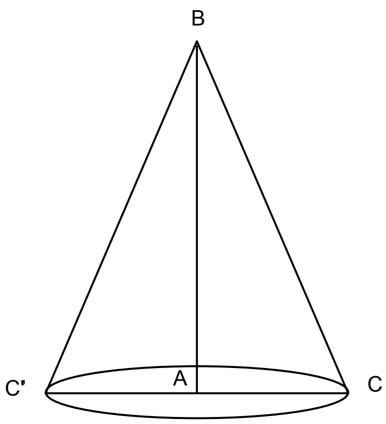
$$c = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{a^2 + 2ah}{2}} \pm \sqrt{\frac{a^2 + 2ah}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + 2ah} \pm \sqrt{a^2 - 2ah}\right).$$

Per quanto riguarda b si ha:

$$b = \frac{ah}{c} \Rightarrow b = \frac{ah}{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + 2ah} \pm \sqrt{a^2 - 2ah}\right)} = 2ah\frac{\left(\sqrt{a^2 + 2ah} \mp \sqrt{a^2 - 2ah}\right)}{\left(\sqrt{a^2 + 2ah} \pm \sqrt{a^2 - 2ah}\right)\left(\sqrt{a^2 + 2ah} \mp \sqrt{a^2 - 2ah}\right)} \Rightarrow$$

$$b = 2ah\frac{\left(\sqrt{a^2 + 2ah} \mp \sqrt{a^2 - 2ah}\right)}{\left[\left(a^2 + 2ah\right) - \left(a^2 + 2ah\right)\right]} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + 2ah} \mp \sqrt{a^2 - 2ah}\right).$$

PUNTO 3
Posto $\overline{BC} = \sqrt{3}$ (metri) e $\overline{AB} = x$, con $0 < x < \sqrt{3}$, si ha $\overline{AC} = \sqrt{3 - x^2}$ e facendo ruotare il triangolo rettangolo attorno alla retta AB si ha:



$V(x) = \dfrac{1}{3}S_b \cdot h = \dfrac{1}{3}\pi\overline{AC}^2 \cdot \overline{AB} = \dfrac{1}{3}\pi\left(3 - x^2\right)x$.

Derivando otteniamo:

$V'(x) = \dfrac{1}{3}\pi\left(3 - 3x^2\right) = \pi\left(1 - x^2\right)$, da cui $V'(x)=0$ per $x=\pm1$.

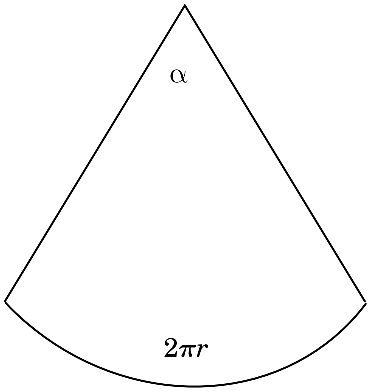
Dalla crescita e decrescita della derivata prima si ha che:

$V'(x)>0$ per $-1<x<1$ $\Rightarrow$ si ha il volume massimo per $x=1$ e tale volume massimo vale $V(1) = \dfrac{2}{3}\pi\ (m^3) \simeq 2{,}0944\ m^3$.

La capacità in litri (1 m^3=1000 dm^3=1000 litri) sarà quindi $V_{MAX} = 2.094{,}4\ l$.

PUNTO 4
Dopo aver osservato che il raggio di base del cono **K** vale $\overline{AC} = \sqrt{3 - x^2} = \sqrt{3 - 1^2} = \sqrt{2}$, ricordiamo che "la lunghezza di un arco di circonferenza è uguale al prodotto tra il raggio e l'angolo al centro corrispondente misurato in radianti"; si ha quindi:

$l = \overline{BC} \cdot \alpha$ e l, misura dell'arco del settore circolare risultante dallo sviluppo del piano della superficie laterale del cono stesso, sarà data da $l = 2\pi r = 2\pi\sqrt{2} \Rightarrow \alpha = \frac{l}{\overline{BC}} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\pi\sqrt{6} \simeq 5{,}13$ rad ;



In gradi sessagesimali si ha invece:

$l = \frac{\pi}{180°}\alpha°\overline{BC} \Rightarrow$

$\alpha° = \frac{180°}{\pi}\frac{l}{\overline{BC}} = \frac{180°}{\pi}\frac{2}{3}\pi\sqrt{6} \simeq 293{,}94° \simeq 293°56'$.