RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 1 PNI

Punto 1: Si tratta di una funzione pari, definita e positiva su tutto l'asse reale. Si ha quindi:

Dominio: **R**

Eventuali simmetrie: la funzione è pari (simmetrica rispetto all'asse y).

Intersezioni con gli assi:

$A(0,k)$ con l'asse y, mentre non ha intersezioni con l'asse x.

Comportamento agli estremi del dominio:

$\lim_{x\to\mp\infty} f(x)=0$

Eventuali asintoti:

Per quanto visto precedentemente, la f presenta un asintoto orizzontale di equazione $y=0$.

Derivata prima: Con facili calcoli si ha: $f'(x)=-2k\lambda x\cdot e^{-\lambda x^2}$ e quindi $y'=0$ per $x=0$.

Crescita e decrescita:

$f'(x)>0$ per $x<0 \Rightarrow A(0,k)$ massimo relativo.

Derivata seconda:

Si ha: $f''(x)=-2k\lambda\cdot e^{-\lambda x^2}+(-2k\lambda x)\left(-2\lambda x\cdot e^{-\lambda x^2}\right)=-2k\lambda\cdot e^{-\lambda x^2}\left(1-2\lambda x^2\right)$ e quindi $y''=0$ per $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}$

(i parametri k e λ sono positivi).

Concavità e convessità:

$f''(x)>0$ per $2\lambda x^2-1>0 \Rightarrow x<-\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}} \vee x>\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}$,

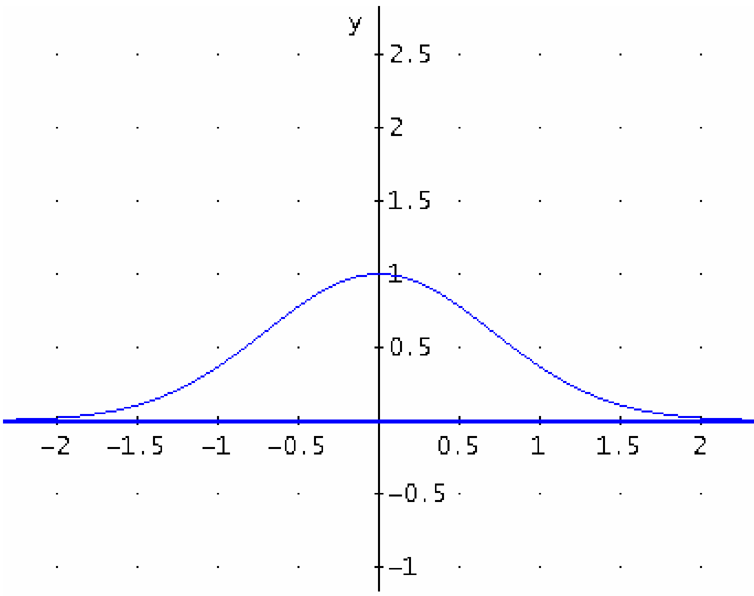
che sono gli intervalli in cui la funzione è concava, $\Rightarrow$

$F_1\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}};f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right)=ke^{-\frac{1}{2}}\simeq 0{,}61k\right)$ e

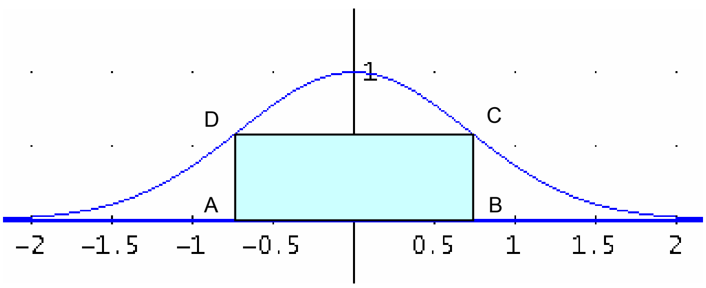
$F_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}};f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right)=ke^{-\frac{1}{2}}\simeq 0{,}61k\right)$ sono punti di flesso.

Il parametro k fa pertanto cambiare il valore del massimo della funzione e l'ordinata dei flessi, mentre il valore di λ fa variare l'ascissa dei flessi rendendo la curva più o meno "allargata" attorno al suo asse di simmetria (asse y).

Il grafico, ponendo λ=1= k, è quello a fianco riportato .



Punto 2: Per determinare il rettangolo di area massima inscritto che ha un lato sull'asse x e i vertici del lato opposto su γ, osserviamo che, fissato $x\geq 0$, il punto B ha coordinate (x, 0) e il punto C ha coordinate $\left(x,ke^{-\lambda x^2}\right)$.



L'area del rettangolo è pertanto:

$S(x)=Area(ABCD)=2\cdot\left(x\cdot ke^{-\lambda x^2}\right)=2k\cdot xe^{-\lambda x^2}$

che, a meno del segno e del parametro λ, coincide con la derivata prima della funzione data.

La derivata prima della (funzione) Area è pertanto: $S'(x)=2k\cdot e^{-\lambda x^2}\left(1-2\lambda x^2\right)$ che si annulla per $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}$. Poiché $S'(x)>0$ per $1-2\lambda x^2>0 \Rightarrow -\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}<x<\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}$, l'area del rettangolo è massima per $x=\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}$, cioè quando il punto C (vedi figura sopra) coincide con il flesso della curva γ e l'area massima vale $S\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right)=k\sqrt{\dfrac{2}{\lambda}}\cdot e^{-\frac{1}{2}}\simeq\dfrac{0{,}86k}{\sqrt{\lambda}}$.

Punto 3: Poiché $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ facendo un cambiamento di variabile 8° il metodo di sostituzione) si ottiene:

$k\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2}\,dx = \frac{k}{\sqrt{\lambda}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{\lambda}x\right)^2}\,d\left(\sqrt{\lambda}x\right) = \frac{k}{\sqrt{\lambda}}\cdot\sqrt{\pi}$ e ponendo tale integrale improprio (che coincide con l'area poiché la f è positiva) uguale ad 1, per $\lambda = \frac{1}{2}$ si ha: $\frac{k}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\pi} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

Otteniamo quindi l'espressione della curva *normale* di Gauss (standardizzata): $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ in cui si ricorda che la *media* (valor medio) $\mu=0$ e lo *scarto quadratico medio* (deviazione standard) $\sigma=1$.

Punto 4: Se nella normale di Gauss (standardizzata) sopra ottenuta poniamo $\mu\neq 0$ e $\sigma\neq 1$ otteniamo la legge di Gauss: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

Si ricordi che dalla legge di Gauss si passa alla normale (standardizzata) di Gauss sostituendo alla variabile x la variabile standardizzata X^*(*corrispondente ad x*), cioè $X^* = \frac{x-\mu}{\sigma}$ e che la variabile standardizata ha due importanti proprietà:

- $M(X^*)=0$ cioè il valor medio è uguale a zero
- $V(X^*)=1$ cioè la varianza è uguale ad uno.

Le più importanti proprietà della $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ sono:

- Il massimo della curva si ha in $x=\mu$ (e vale $f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$) e proprio la retta di equazione $x=\mu$ è l'asse di simmetria della curva:
- I flessi della curva si hanno nei punti $x = \mu \pm \sigma$;
- L'area della regione compresa tra la curva e l'asse delle ascisse vale 1;
- Se il parametro $\mu > 0$ si ha una traslazione della gaussiana nel verso positivo delle ascisse, mentre se $\mu < 0$ si ha una traslazione nel verso opposto (ovviamente se $\mu = 0$ si ha una simmetria rispetto l'asse y).
- Il parametro σ determina una curva gaussiana più o meno allargata e precisamente più grande è il valore di σ e più "larga" è la curva e minori il suo massimo e la sua pendenza; più piccolo è il valore di σ, più grande è il massimo della funzione e più rapida è la pendenza.