RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 2 PNI

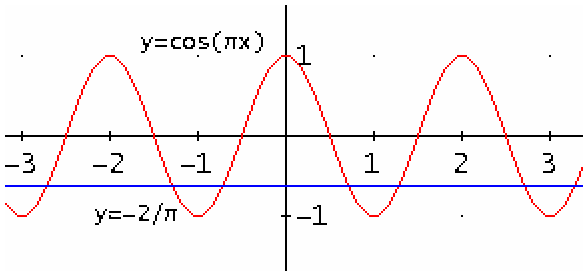
Punto 1: La funzione $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2b}x\right)+x$ (con a e b reali e diversi da zero) è continua su tutto R ed in particolare nell'intervallo [a, b]; per il **teorema dei valori intermedi** (o **di Darboux**) allora essa assume, almeno una volta, qualunque valore compreso tra $f(a)$ e $f(b)$.

Poiché risulta $f(a)=a$ ed $f(b)=b$, si ha $f(x)=\frac{a+b}{2}=\frac{f(a)+f(b)}{2}$ e quest'ultimo è ovviamente un valore compreso tra $f(a)$ e $f(b)$.

Punto 2: Per i valori assegnati la dalla *f* si ottiene la funzione *g* di equazione:

$$g(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)+x=\frac{1}{2}\sin(\pi x)+x$$

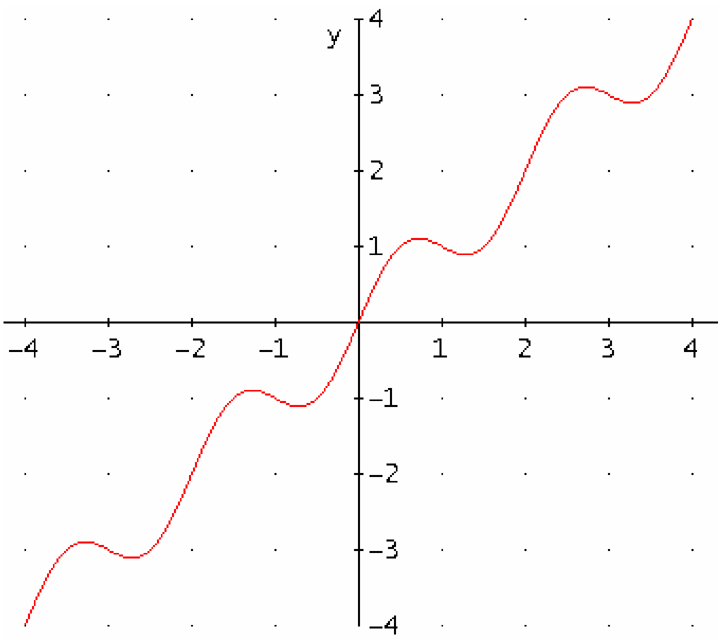
dove l'ultima espressione si è ottenuta con la formula inversa della duplicazione (o con le formule di Werner. La funzione g è la somma di x con una funzione limitata di periodo 2.
Si tratta di una funzione dispari, definita tutto l'asse reale. Si ha quindi:
Dominio: **R**
Eventuali simmetrie: la funzione è dispari (simmetrica rispetto all'origine).
Intersezioni con gli assi:
L'unica intersezione è l'origine degli assi $O(0,0)$.
Comportamento agli estremi del dominio:
$\lim_{x\to\mp\infty} g(x)=\mp\infty$
Eventuali asintoti:
La g non presenta né asintoto orizzontale né obliquo.
Derivata prima: Si ha:
$g'(x)=\frac{1}{2}\pi\cos(\pi x)+1$ e quindi $g'=0$ per $\cos(\pi x)=-\frac{2}{\pi}$ che ammette infinite soluzioni e che si può risolvere graficamente.



Si ottiene quindi $g'=0$ per:

$\pi x=\pm\arccos\left(-\frac{2}{\pi}\right)+2k\pi \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\pi}\arccos\left(-\frac{2}{\pi}\right)+2k\simeq\pm0{,}72+2k$ che possiamo scrivere:

$x=\pm\alpha+k\cdot2$, dove $k\in\mathbb{Z}$ e $\alpha\simeq0{,}72$ (si noti che anche $y=\cos(\pi x)$ ha periodo T=2).
Crescita e decrescita:
Dalla rappresentazione grafica sopra riportatasi ha che :



$g'(x)=\frac{1}{2}\pi\cos(\pi x)+1>0$ per

$\cos(\pi x)>-\frac{2}{\pi} \Rightarrow -\alpha+k\cdot2<x<\alpha+k\cdot2$

Si hanno quindi massimi relativi in $x=\alpha+k\cdot2$ e minimi relativi per $x=-\alpha+k\cdot2$; i primi valori stazionari positivi (la funzione è dispari quindi era sufficiente studiarne solo la parte positiva e costruirsi l'altra parte del grafico per simmetria) saranno:
$M_1=(0{,}72; f(0{,}72)\simeq1{,}11)$ e
$M_2=(2{,}72; f(2{,}72)\simeq3{,}11)$ per i massimi e
$m_1=(1{,}28; f(1{,}28)\simeq0{,}89)$
$m_1=(3{,}28; f(3{,}28)\simeq2{,}89)$ per i minimi.
Derivata seconda:
Si ottiene:
$g''(x)=-\frac{1}{2}\pi^2\sin(\pi x)$ e quindi $g''=0$ per

$\pi x = k \cdot \pi \Rightarrow x = k \Rightarrow x = 0 \vee x = \pm 1 \vee x = \pm 2$ ...

Concavità e convessità:

$g''(x) = -\frac{1}{2}\pi^2 \sin(\pi x) > 0$ per gli intervalli in cui sin(πx)<0, cioè gli intervalli $-1 + 2k < x < 2k \Rightarrow$ la funzione presenta dei flessi nei punti:

$F_i(-1+2k; f(-1+2k))$ e $F_j(2k; f(2k))$ $(i, j;\ 1 \ldots n)$ in cui la funzione da concava passa a convessa;

per $x \geq 0$ si hanno i flessi $F_1(0;0)$, $F_2(1;1)$ e $F_3(2;2)$.

Il grafico è quello sopra riportato.

Punto 3: Per quanto riguarda il primo massimo α positivo esso cade 1/2 ed 1.

Infatti tenuto conto della $g'(x) = \frac{1}{2}\pi\cos(\pi x) + 1$, si ha:

$g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\pi\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 = 1 > 0$ e $g'(1) = \frac{1}{2}\pi\cos(\pi \cdot 1) + 1 = -\frac{1}{2}\pi + 1 \simeq -0{,}57 < 0$ per il teorema dell'esistenza degli zeri α∈]1/2; 1[.

Usando il metodo di bisezione per ottenere un valore approssimato, otteniamo:

$$f\left(\frac{\frac{1}{2}+1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{4}\right) \simeq -0{,}11 < 0 \Rightarrow \alpha \in \left]\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right[;$$

$$f\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{2}\right) = f\left(\frac{5}{8}\right) \simeq 0{,}40 > 0 \Rightarrow \alpha \in \left]\frac{5}{8};\frac{3}{4}\right[;$$

$$f\left(\frac{\frac{3}{4}+\frac{5}{8}}{2}\right) = f\left(\frac{11}{16}\right) \simeq 0{,}13 > 0 \quad \alpha \in \left]\frac{11}{16};\frac{3}{4}\right[$$ e quindi 0,6875< α < 0,75.