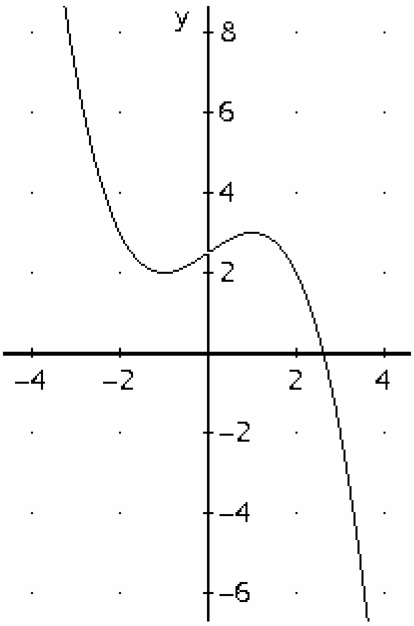
QUESITI 1-5 (ordinamento)

1. Si imposta il sistema: $\begin{cases} a+b=k \\ a\cdot b=k \end{cases} \Rightarrow a(b-1)=b \Rightarrow a=\dfrac{b}{b-1}\ (b\neq 1)$.

   Si ha quindi: $\dfrac{b}{b-1}\cdot b=k \Rightarrow b^2-kb+k=0 \Rightarrow b=\dfrac{k\pm\sqrt{k^2-4k}}{2}$ con $k\leq 0 \vee k\geq 4$.

   Si prenda ad es. k=5 (per k=0 e k=4 si hanno soluzioni coincidenti); si ottiene allora (prendendo la soluzione maggiore) $b=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$ e $a=\left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\dfrac{2}{5+\sqrt{5}-2}\right)=\left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right)$ e si verifica facilmente che la loro somma ed il loro prodotto valgono proprio 5=k.

2. Il quesito è molto simile al quesito n.8 della sessione suppletiva PNI 2001 (si veda Scovenna-Checcaglini "mathelp!" quarta edizione pag. 137 ed Cedam)
   Ricordando che l'area della superficie totale di un cilindro è data da: $S_T=2\pi rh+2\pi r^2$ (r raggio di base del cilindro ed h altezza) e che l'area della superficie della sfera è $S=4\pi R^2$ (R raggio della sfera). Nel caso di un cilindro equilatero (la cui sezione è un quadrato) si ha h=2r e nel caso di sfera circoscritta al cilindro equilatero si ha $R=r\sqrt{2}$, per cui: $\dfrac{S_{Tot(CILINDRO)}}{S_{(SFERA)}}=\dfrac{2\pi r\cdot 2r+2\pi r^2}{4\pi\cdot\left(r\sqrt{2}\right)^2}=\dfrac{6\pi r^2}{8\pi r^2}=\dfrac{3}{4}$.



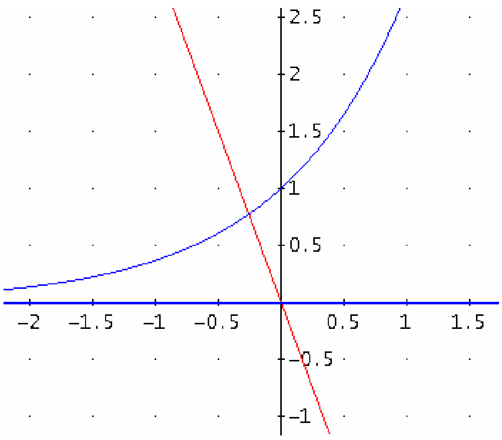
3. Basterà prendere in esame una cubica con primo coefficiente negativo ($\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$), che presenterà un flesso in (0;5/2) punto medio tra massimo e minimo e un punto stazionario (minimo relativo) in (–1;2) e che quindi soddisfa le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} f'(x)=3ax^2+2bx+c \Rightarrow f'(-1)=3a-2b+c=0 \\ f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow 2=-a+b-c+d \\ f''(x)=6ax+2b \Rightarrow f''(0)=2b=0 \\ f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow f(0)=d=\dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{4} \\ b=0 \\ c=\dfrac{3}{4} \\ d=\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

4. L'equazione $e^x+3x=0$ equivale alla intersezione grafica tra le funzioni $y=e^x$ e $y=-3x$, da cui risulta che le due funzioni hanno una ed una sola intersezione (e quindi l'equazione una ed una sola soluzione) $\alpha\in[-1;0]$.

   Infatti, per il teorema dell'esistenza degli zeri si ha:

   $$f(-1)=e^{-1}+3(-1)\simeq -2{,}63<0$$
   $$f(0)=e^0+3(0)=1>0$$



5. Per semplicità andiamo a considerare una funzione algebrica. Dalle condizioni poste risulta che la funzione non è continua in x=2. Possiamo quindi considerare la

seguente funzione (definita a tratti) ovunque definita e discontinua in x=2):

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{per } x \neq 2 \\ 4 & \text{per } x = 2 \end{cases}.$$

Si ha infatti: $\lim_{x \to 2} x^2 - 1 = 3$ e $g(2) = 4$.