

QUESITI 1-5 (ordinamento)

1. Si imposta il sistema: $\begin{cases} a + b = k \\ a \cdot b = k \end{cases} \Rightarrow a(b - 1) = b \Rightarrow a = \frac{b}{b - 1} \quad (b \neq 1).$

Si ha quindi: $\frac{b}{b - 1} \cdot b = k \Rightarrow b^2 - kb + k = 0 \Rightarrow b = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4k}}{2}$ con $k \leq 0 \vee k \geq 4$.

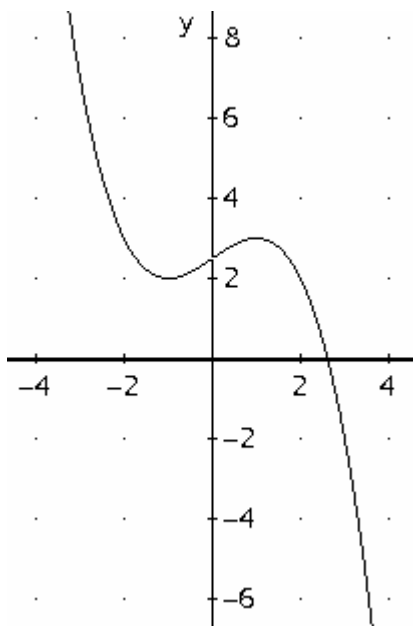
Si prenda ad es. $k=5$ (per $k=0$ e $k=4$ si hanno soluzioni coincidenti); si ottiene allora (prendendo la soluzione maggiore) $b = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$ e $a = \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right) \left(\frac{2}{5 + \sqrt{5} - 2}\right) = \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}\right)$ e si verifica facilmente che la loro somma ed il loro prodotto valgono proprio $5=k$.

2. Il quesito è molto simile al quesito n.8 della sessione suppletiva PNI 2001 (si veda Scovenna-Checcaglini "mathelp!" quarta edizione pag. 137 ed Cedam)

Ricordando che l'area della superficie totale di un cilindro è data da: $S_T = 2\pi r h + 2\pi r^2$ (r raggio di base del cilindro ed h altezza) e che l'area della superficie della sfera è $S = 4\pi R^2$ (R raggio della sfera). Nel caso di un cilindro equilatero (la cui sezione è un quadrato) si ha $h=2r$ e nel caso di sfera circoscritta al cilindro equilatero si ha $R = r\sqrt{2}$, per cui:

$$\frac{S_{Tot(CILINDRO)}}{S_{(SFERA)}} = \frac{2\pi r \cdot 2r + 2\pi r^2}{4\pi \cdot (r\sqrt{2})^2} = \frac{6\pi r^2}{8\pi r^2} = \frac{3}{4}.$$

3. Basterà prendere in esame una cubica con primo coefficiente negativo ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$), che presenterà un flesso in $(0; 5/2)$ punto medio tra massimo e minimo e un punto stazionario (minimo relativo) in $(-1; 2)$ e che quindi soddisfa le seguenti condizioni:



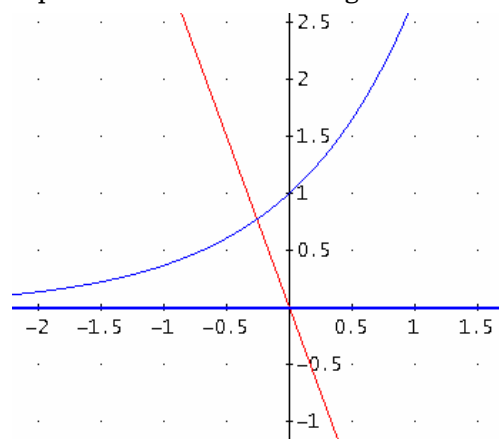
$$\begin{cases} f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f'(-1) = 3a - 2b + c = 0 \\ f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow 2 = -a + b - c + d \\ f''(x) = 6ax + 2b \Rightarrow f''(0) = 2b = 0 \\ f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f(0) = d = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = 0 \\ c = \frac{3}{4} \\ d = \frac{5}{2} \end{cases}$$

4. L'equazione $e^x + 3x = 0$ equivale alla intersezione grafica tra le funzioni $y = e^x$ e $y = -3x$, da cui risulta che le due funzioni hanno una ed una sola intersezione (e quindi l'equazione una ed una sola soluzione) $\alpha \in [-1; 0]$.

Infatti, per il teorema dell'esistenza degli zeri si ha:

$$f(-1) = e^{-1} + 3(-1) \simeq -2,63 < 0$$

$$f(0) = e^0 + 3(0) = 1 > 0$$



5. Per semplicità andiamo a considerare una funzione algebrica. Dalle condizioni poste risulta che la funzione non è continua in $x=2$. Possiamo quindi considerare la

seguinte funzione (definita a tratti) ovunque definita e discontinua in $x=2$):

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{per } x \neq 2 \\ 4 & \text{per } x = 2 \end{cases}.$$

Si ha infatti: $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 1 = 3$ e $g(2) = 4$.