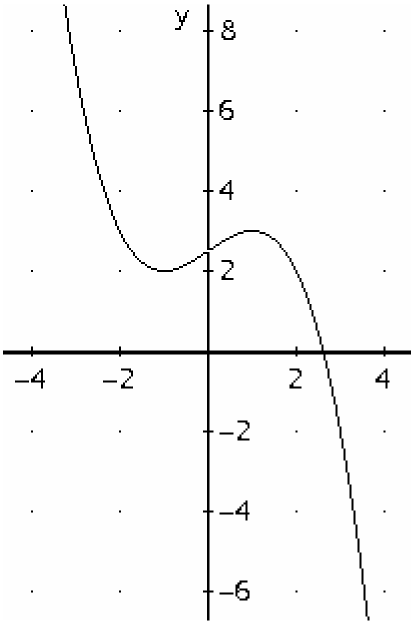
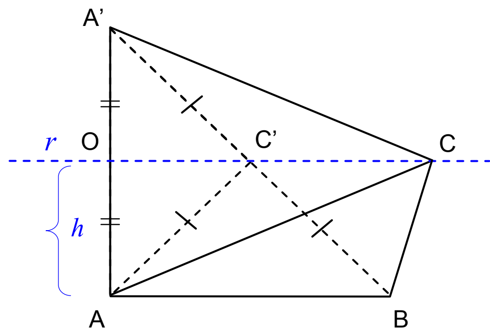
QUESITI 6-10 (pni)



6. Basterà prendere in esame una cubica con primo coefficiente negativo ($\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$), che presenterà un flesso in (0;5/2) punto medio tra massimo e minimo e un punto stazionario (minimo relativo) in (−1;2) e che quindi soddisfa le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f'(-1) = 3a - 2b + c = 0 \\ f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow 2 = -a + b - c + d \\ f''(x) = 6ax + 2b \Rightarrow f''(0) = 2b = 0 \\ f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f(0) = d = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{4} \\ b = 0 \\ c = \dfrac{3}{4} \\ d = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

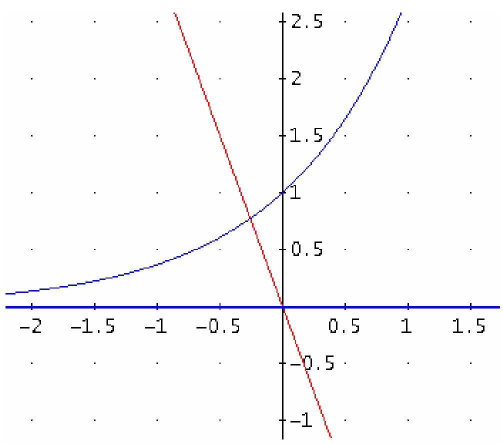
7. Se i triangoli hanno base assegnata *AB* e stessa area *S*, allora avranno anche la stessa altezza *h* e quindi il vertice *C* apparterrà a una retta r parallela alla retta di *AB* e a distanza da *AB* pari all'altezza *h*. Rendere minimo il perimetro del triangolo *ABC*, equivale a rendere minima la somma *AC*+*CB* (essendo *AB* costante). Sia *A'* il simmetrico di *A* rispetto alla retta *r*; ne segue che *A'C*=*AC* (essendo *r* asse del segmento *AA'*) e quindi basterà rendere minima la somma *A'C*+*CB*=*AC*+*CB*. Tale somma è minima quando *C*≡*C'*, cioè quando *A'*, *C'* e *B* sono allineati (*A'B* è l'ipotenusa del triangolo rettangolo *ABA'*). In tal caso *C'* è punto medio di *A'B* (*OC'*//*AB*) e quindi *AC'* è mediana relativa all'ipotenusa e, per un noto teorema di geometria piana, è uguale alla metà dell'ipotenusa stessa ⇒ *A'C'*=*C'B*= *AC'*. Ne segue dunque che: *A'B*=*AC'*+ *BC'* e quindi che il perimetro minimo si ha per *ABC* isoscele.



8. Si imposta il sistema: $\begin{cases} a+b=k \\ a\cdot b = k \end{cases} \Rightarrow a(b-1) = b \Rightarrow a = \dfrac{b}{b-1} \ (b \neq 1)$.

Si ha quindi: $\dfrac{b}{b-1}\cdot b = k \Rightarrow b^2 - kb + k = 0 \Rightarrow b = \dfrac{k \pm \sqrt{k^2-4k}}{2}$ con $k \le 0 \vee k \ge 4$.

Si prenda ad es. *k*=5 (per k=0 e k=4 si hanno soluzioni coincidenti); si ottiene allora (prendendo la soluzione maggiore) $b = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$ e $a = \left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\dfrac{2}{5+\sqrt{5}-2}\right) = \left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right)$ e si verifica facilmente che la loro somma ed il loro prodotto valgono proprio 5=*k*.



9. L'equazione $e^x + 3x = 0$ equivale alla intersezione grafica tra le funzioni $y = e^x$ e $y = -3x$, da cui risulta che le due funzioni hanno una ed una sola intersezione (e quindi l'equazione una ed una sola soluzione) α∈[−1,0]. Infatti, per il teorema dell'esistenza degli zeri si ha:
$f(-1) = e^{-1} + 3(-1) \simeq -2{,}63 < 0$

$f(0) = e^0 + 3(0) = 1 > 0$; con un metodo iterativo (ad esempio il metodo di bisezione) si trova che $\alpha \cong -0{,}26$.

10. La trasformazione data è ovviamente una centro affinità diretta in quanto il rapporto di affinità: $\begin{vmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 4 > 0$. È anche una similitudine poiché verifica le condizioni: $\begin{cases} a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \\ ab + cd = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + 1 = 3 + 1 \\ \sqrt{3}(-1) + \sqrt{3}(1) = 0 \end{cases}$, ma non è isometria poiché $k = \sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{b^2 + d^2} \neq 1$.

N.B. In alternativa, ricordando che la similitudine è la composizione, in qualsiasi ordine, di una omotetia con una isometria, si poteva scrivere la trasformazione $\begin{cases} x' = x\sqrt{3} - y \\ y' = x + y\sqrt{3} \end{cases}$ come $\begin{cases} x' = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y\right) \\ y' = 2\left(\dfrac{1}{2}x + y\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$ e notare che era la composizione di una rotazione di 30° con una omotetia di rapporto 2.