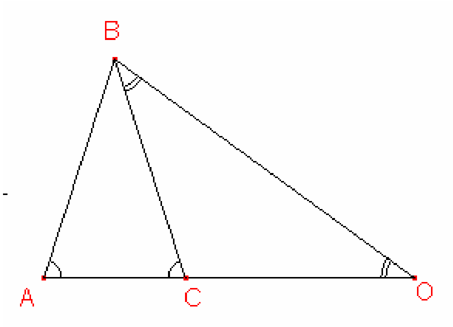
## QUESITI 1 – 5 ordinamento




### Quesito n. 1

Intanto ricordiamo che "si dice **sezione aurea** di un segmento $OA$ quella parte $OC$ tale che $OA : OC = OC : AC$ " e sappiamo che indicato $OA$ con $a$, $OC$ con $x$ e $AC$ con $a-x$, si ha:

$x^2 + ax - a^2 = 0 \Rightarrow x = a\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ (ovviamente la soluzione negativa non è accettabile).

Sia $AB$ il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza di centro $O$. Vogliamo dimostrare che $AB$ è la sezione aurea del raggio $OA$.

Infatti, unito $O$ con i punti $A$ e $B$, nel triangolo isoscele $AOB$ si ha che l'angolo $\hat{O}$ è la decima parte di un angolo giro, vale cioè di 36° e di conseguenza gli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ valgono 72°.

Tracciata la bisettrice $BC$ dell'angolo $\hat{B}$ (che forma due angoli di 36°), si ottengono due triangoli isosceli $ABC$ e $OBC$ rispettivamente di base $AC$ e $OB$. . Si ha allora: $AB$=$BC$=$OC$.

D'altra parte i triangoli $OAB$ e $ACB$ sono simili, in quanto hanno gli angoli ordinatamente uguali; si ha allora: $OA : AB = AB : AC$ .

Ma da quanto osservato precedentemente $AB$=$OC$ per cui:

$OA : OC = OC : AC$ , ossia $OC$ è la sezione aurea di $OA$.

Quindi possiamo concludere che: $OC = l_{10} = r\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

Assegnata poi una circonferenza goniometrica, per calcolare il sen18°, basterà osservare che esso vale la metà del lato del decagono regolare inscritto, per cui si ha immediatamente: $\sin 18° = \dfrac{l_{10}}{2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ .

Ma sappiamo dalla goniometria che sen18°=cos72° (per le proprietà degli angoli complementari) e che inoltre (formula di bisezione): $\sin 36° = \sin\dfrac{72°}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos 72°}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}}{2}} = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}} = \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$

### Quesito n. 2

Essendo il volume 0,4 litri cioè 0,4 dm$^3$, avrò subito: V=400 cm$^3$.

A questo punto ricordata la formula del volume: $V = \pi r^2 h$ e posto $r$=$x$, si ha: $h = \dfrac{400}{\pi x^2}$ .

Allora: $S_{tot} = S_{lat} + 2S_{base} = 2\pi x \cdot \dfrac{400}{\pi x^2} + 2\pi x^2 = \dfrac{800}{x} + 2\pi x^2$ ;

$S'(x) = 4\pi x - \dfrac{800}{x^2} = \dfrac{4\pi x^3 - 800}{x^2}$ e quindi $S'(x) = \dfrac{4\pi x^3 - 800}{x^2} = 0 \Rightarrow \pi x^3 - 200 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{200}{\pi}} \simeq 3{,}99$

Studiando il segno della derivata prima si ha: $S'(x) = \dfrac{4\pi x^3 - 800}{x^2} > 0 \Rightarrow x > \sqrt[3]{\dfrac{200}{\pi}} \simeq 3{,}99$ e quindi effettivamente $x = \sqrt[3]{\dfrac{200}{\pi}} \simeq 3{,}99$ cm è un minimo.

L'altezza sarà allora: $h = \dfrac{400}{\pi\sqrt[3]{\left(\dfrac{200}{\pi}\right)^2}} \simeq 7{,}99$ cm.

### Quesito n. 3

Intanto ricordiamo che se la funzione $y = f(x)$ è derivabile in un punto $x_0$ si definisce retta tangente al grafico di $f(x)$ in $x_0$ la retta passante per il punto $(x_0; f(x_0))$ e avente come coefficiente angolare $f'(x_0)$.

Tale retta avrà quindi equazione: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ .

Sia ora $f(x) = x\sin x$; avremo $f'(x) = \sin x + x\cos x$; inoltre $\sin x = 1 \Rightarrow \cos x = 0$ e quindi $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$;

poiché $f\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\cdot 1$ e $f'\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1 + 0 = 1$, la retta tangente al grafico di $f$ in questi puniti sarà $y - \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1\left(x - \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right) \Rightarrow y = x$.

Analogamente per $\sin x = -1 \Rightarrow \cos x = 0$ e quindi $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, verificando che in questo caso la retta tangente ha equazione $y = -x$.

**Quesito n. 4**

Indicata con $2x$ la base di un rettangolo e con $2y$ la sua altezza, si ha: $2x + 2y = 2p \Rightarrow x + y = p$, essendo p un valore assegnato. Si avrà allora: $y = p - x$ per cui l'area avrà equazione:

$S(x) = x(p - x) = px - x^2$.

La funzione area (da rendere massima) è una parabola che volge la concavità verso il basso e quindi assume il valore massimo per l'ascissa del vertice della parabola stessa; ne segue che $x_M = \frac{p}{2}$ e tale valore massimo è $S\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{p^2}{4}$.

Di conseguenza anche $y = \frac{p}{2}$ e quindi, poiché base ed altezza sono uguali, il rettangolo è un quadrato.

**Quesito n. 5**

Il numero $e$ di Nepero viene definito come limite della successione: $\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \simeq 2{,}718..$

Più precisamente si dimostra che "$e$" è l'estremo superiore della successione di termine generale $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e l'estremo inferiore della successione di termine generale $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$; si ha perciò, qualunque sia $n$: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$; tali disuguaglianze danno anche una limitazione dell'errore che si commette se si prende come valore approssimato del numero e il valore di $a_n$ o di $b_n$.

Poiché si dimostrare che la derivata di $e^x$ è ancora $e^x$, basta applicare la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale. Si ha:

$\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x\left(e^h - 1\right)}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{\left(e^h - 1\right)}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$ (il secondo è un limite fondamentale).