

## Quesiti 6-10 ordinamento 2005

### Quesito n. 6

Dato un numero naturale  $n$  maggiore di 1, si definisce fattoriale del numero  $n$  e si indica con  $n!$ , il prodotto dei primi  $n$  numeri naturali, cioè:  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$

Per definizione si pone:  $0! = 1$  e  $1! = 1$ .

Nel calcolo combinatorio il fattoriale di un numero  $n$  rappresenta il numero delle permutazioni semplici di  $n$  oggetti (si ricordi che una permutazione semplice è una disposizione semplice di  $n$  oggetti di classe  $n$ ). Il legame con i coefficienti binomiali si ricava dal fatto che la prima proprietà che si dimostra sui

coefficienti binomiali  $C_{n,k} = \binom{n}{k}$  è proprio:  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ , detta anche *legge dei tre fattoriali*,

che si dimostra facilmente ricordando la formula che fornisce il numero delle combinazioni semplici a partire da  $n$  oggetti, di classe  $k$ , con  $k \leq n$ . Da questa si dimostrano anche tutte le altre proprietà.

### Quesito n. 7

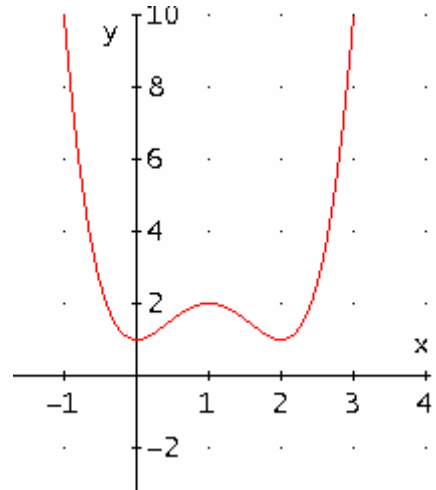
Risolvere l'equazione  $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3 = 2$  equivale a risolvere l'equazione  $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1 = 0$  e cioè a trovare le intersezioni della funzione  $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$  con l'asse delle  $x$ .

Derivando tale funzione (quartica) si ha:  $y' = 4x^3 - 12x^2 + 8x$  che si annulla per  $x = 0$ ;  $x = 1$ ;  $x = 2$  e dalla crescita e decrescita si trova che  $f(x) > 0$  per  $0 < x < 1 \vee x > 2$  e quindi ha un massimo  $M(1; f(1) = 2)$  e due minimi  $m_1(0; 1)$  ed  $m_2(2; 1)$ ; poiché inoltre  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$  la funzione sarà sempre positiva e non avrà quindi intersezioni con l'asse  $x$ .

In

alternativa:

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3 = x^2(x^2 - 4x + 4) + 3 = x^2(x-2)^2 + 3$  ed essendo  $x^2(x-2)^2 \geq 0$  segue che  $f(x) = x^2(x-2)^2 + 3 > f(k) = 2$  e quindi non vi è alcun numero reale  $k$  per cui  $f(k) = 2$ .

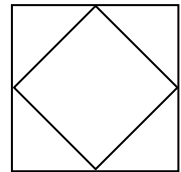


### Quesito n. 8

Un ottaedro regolare inscritto in un cubo equivale a due piramidi di basi coincidenti (con area di base uguale alla metà di quella di una faccia del cubo) ed altezza uguale alla metà del lato del cubo Vedi sezione in figura).

Indicato con  $l$  il lato del cubo: si ha:

$$V_{(CUBO)} = l^3 \text{ e } V_{(OTTAEDRO)} = 2 \cdot \left(\frac{l^2}{2}\right) \cdot \left(\frac{l}{2}\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{l^3}{6} \text{ e quindi } \frac{V_{(CONO)}}{V_{(OTTAEDRO)}} = \frac{l^3}{\frac{l^3}{6}} = 6$$



### Quesito n. 9

Poiché  $35^\circ$  e  $55^\circ$  sono angoli complementari, dalla relazione:  $\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ , si ottiene:  $\sin^2(35^\circ) = \cos^2(55^\circ)$  per cui  $\sin^2(35^\circ) + \sin^2(55^\circ) = \cos^2(55^\circ) + \sin^2(55^\circ) = 1$ , per la relazione fondamentale della goniometria.

### Quesito 10

$f(x) = \arctan x - \arctan \frac{x-1}{x+1}$  è definita in  $\mathbb{R} - \{-1\}$ , cioè negli intervalli  $]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$ .

Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(x+1)^2}{x^2+2x+1+x^2-2x+1} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{(x+1)^2}{2(x^2+1)} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

La funzione è quindi costante negli intervalli considerati del suo insieme di definizione.

Per calcolarne il valore possiamo prendere un valore particolare a destra o sinistra di  $x = -1$  o meglio calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x - \arctan \frac{x-1}{x+1} = -\frac{\pi}{2} - \arctan(1) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{3}{4}\pi$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x - \arctan \frac{x-1}{x+1} = \frac{\pi}{2} - \arctan(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

