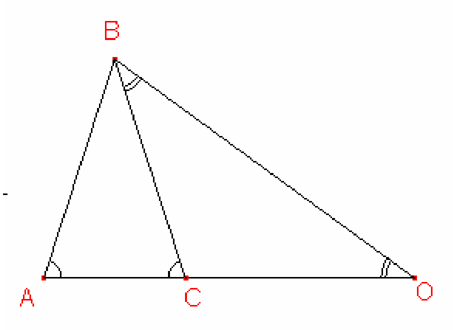
QUESITI PNI

Quesito n. 1



Intanto ricordiamo che “si dice **sezione aurea** di un segmento OA quella parte OC tale che $OA : OC = OC : AC$ ” e sappiamo che indicato OA con a, OC con x e AC con $a-x$, si ha:

$x^2 + ax - a^2 = 0 \Rightarrow x = a\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ (ovviamente la soluzione negativa non è accettabile).

Sia AB il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza di centro O. Vogliamo dimostrare che AB è la sezione aurea del raggio OA.

Infatti, unito O con i punti A e B, nel triangolo isoscele AOB si ha che l’angolo $\hat{O}$ è la decima parte di un angolo giro, vale cioè di $36°$ e di conseguenza gli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$ valgono 72°.

Tracciata la bisettrice BC dell’angolo $\hat{B}$ (che forma due angoli di 36°), si ottengono due triangoli isosceli ABC e OBC rispettivamente di base AC e OB. . Si ha allora: AB=BC=OC.

D’altra parte i triangoli OAB e ACB sono simili, in quanto hanno gli angoli ordinatamente uguali; si ha allora: $OA : AB = AB : AC$.

Ma da quanto osservato precedentemente AB=OC per cui:

$OA : OC = OC : AC$, ossia OC è la sezione aurea di OA.

Quindi possiamo concludere che: $OC = l_{10} = r\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

Assegnata poi una circonferenza goniometrica, per calcolare il sen18°, basterà osservare che esso vale la metà del lato del decagono regolare inscritto, per cui si ha immediatamente: $\sin 18° = \dfrac{l_{10}}{2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Ma sappiamo dalla goniometria che sen18°=cos72° (per le proprietà degli angoli complementari) e che inoltre (formula di bisezione): $\sin 36° = \sin\dfrac{72°}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos 72°}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}}{2}} = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}} = \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$

Quesito n. 2

Ricordiamo che: “si dice tangente ad una curva in un suo punto P, la posizione limite, se esiste, della retta che unisce P con un altro punto Q della curva, allorché Q tende a P sia da sinistra che da destra”.
Possiamo anche dire che una retta è tangente ad una curva quando la incontra in almeno due punti coincidenti.

In ogni caso, dall’interpretazione geometrica del concetto di derivata, se la funzione $y = f(x)$ è derivabile in un punto x_0 si definisce retta tangente al grafico di $f(x)$ in x_0 la retta passante per il punto $(x_0; f(x_0))$ e avente come coefficiente angolare $f'(x_0)$. Tale retta avrà quindi equazione: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Sia ora $f(x) = x\sin x$; avremo $f'(x) = \sin x + x\cos x$; inoltre $\sin x = 1 \Rightarrow \cos x = 0$ e quindi $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$;

poiché $f\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right) = \left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)\cdot 1$ e $f'\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right) = 1+0 = 1$, la retta tangente al grafico di f in questi

puniti sarà $y - \left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right) = 1\left(x - \left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right) \Rightarrow y = x$.

Analogamente per $\sin x = -1 \Rightarrow \cos x = 0$ e quindi $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, verificando che in questo caso la retta tangente ha equazione $y = -x$.

Quesito n. 3

La traslazione può essere considerata come la composizione di due simmetrie assiali con assi paralleli tra loro e perpendicolari al vettore traslazione. Nel nostro caso avremo due rette parallele alla bisettrice del I e III quadrante; poiché il vettore traslazione ha componenti $\left(\sqrt{5}; -\sqrt{5}\right)$; possiamo quindi prendere le rette

$y=x$ e $y=x+q$, con q da determinare. Poiché la simmetria rispetto alla retta $y=x$ ha equazioni $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ e

la simmetria rispetto alla retta $y=x+q$ ha equazioni: $\begin{cases} x' = y - q \\ y' = x + q \end{cases}$ (dati due punti $P(x;y)$ e $P'(x';y')$ per ricavarle basterà infatti porre l'appartenenza del punto medio di *PP'* alla retta $y=x+q$ e il coefficiente angolare di della retta passante *PP'* controreciproco di quello della retta $y=x+q$), si ha:

$\varphi : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ e $\sigma : \begin{cases} x'' = y' - q \\ y'' = x' + q \end{cases}$ per cui $\sigma \circ \varphi : P(x;y) \underset{\varphi}{\rightarrow} P'(x';y') \underset{\sigma}{\rightarrow} P''(x'';y'')$, cioè

$\sigma \circ \varphi : (x;y) \underset{\varphi}{\rightarrow} (x' = y; y' = x) \underset{\sigma}{\rightarrow} (x'' = x' + q; y'' = y' - q)$ e quindi $\begin{cases} x'' = x' + q \\ y'' = y' - q \end{cases}$.

Dovrà essere allora $q = -\sqrt{5}$ poiché si aveva: $\sigma \circ \rho \begin{cases} X = x - \sqrt{5} \\ Y = y + \sqrt{5} \end{cases}$.

Ne segue che le due trasformazioni richieste hanno equazioni: $\varphi : \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ e $\sigma : \begin{cases} x'' = y' + \sqrt{5} \\ y'' = x' - \sqrt{5} \end{cases}$

Per quanto riguarda infine la composizione in ordine inverso:
$\varphi \circ \sigma : P(x;y) \underset{\sigma}{\rightarrow} P'(x';y') \underset{\varphi}{\rightarrow} P''(x'';y'')$, cioè

$\varphi \circ \sigma : (x;y) \underset{\varphi}{\rightarrow} \left(x' = y + \sqrt{5}; y' = x - \sqrt{5}\right) \underset{\sigma}{\rightarrow} \left(x'' = x' - \sqrt{5}; y'' = y' + \sqrt{5}\right)$ e quindi: $\varphi \circ \sigma : \begin{cases} x'' = x' - \sqrt{5} \\ y'' = y' + \sqrt{5} \end{cases}$ o

con le precedenti notazioni: $\varphi \circ \sigma : \begin{cases} X = x - \sqrt{5} \\ Y = y + \sqrt{5} \end{cases}$ che è quindi una traslazione individuata dal vettore

opposto $\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$

Quesito n. 4

Essendo il volume 0,4 litri cioè 0,4 dm^3, avrò subito: V=400 cm^3.

A questo punto ricordata la formula del volume: $V = \pi r^2 h$ e posto $r=x$, si ha: $h = \dfrac{400}{\pi x^2}$.

Allora: $S_{tot} = S_{lat} + 2S_{base} = 2\pi x \cdot \dfrac{400}{\pi x^2} + 2\pi x^2 = \dfrac{800}{x} + 2\pi x^2$;

$S'(x) = 4\pi x - \dfrac{800}{x^2} = \dfrac{4\pi x^3 - 800}{x^2}$ e quindi $S'(x) = \dfrac{4\pi x^3 - 800}{x^2} = 0 \Rightarrow \pi x^3 - 200 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{200}{\pi}} \simeq 3{,}99$

Studiando il segno della derivata prima si ha: $S'(x) = \dfrac{4\pi x^3 - 800}{x^2} > 0 \Rightarrow x > \sqrt[3]{\dfrac{200}{\pi}} \simeq 3{,}99$ e quindi

effettivamente $x = \sqrt[3]{\dfrac{200}{\pi}} \simeq 3{,}99$ cm è un minimo.

L'altezza sarà allora: $h = \dfrac{400}{\pi \sqrt[3]{\left(\dfrac{200}{\pi}\right)^2}} \simeq 7{,}99$ cm.

Quesito n. 5

Il numero *e* di Nepero viene definito come limite della successione: $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \simeq 2{,}718..$

Più precisamente si dimostra che "*e*" è l'estremo superiore della successione di termine generale $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ e l'estremo inferiore della successione di termine generale $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$; si ha perciò,

qualunque sia n: $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$; tali disuguaglianze danno anche una limitazione dell'errore che si commette se si prende come valore approssimato del numero e il valore di a_n o di b_n.

Questo numero è fondamentale in molte parti della matematica e delle applicazioni. Il numero e viene assunto come base di un sistema di logaritmi detti neperiani o naturali e la funzione $f(x) = e^x$, tra le sue proprietà, ha quella di coincidere con la sua derivata prima; vi sono inoltre diversi modelli a "crescita esponenziale" ecc..
Per la procedura si rimanda alle attività di laboratorio.