

**Quesito n. 6**

Poiché le rette  $r : y = 1 + 2x$  ed  $s : y = 2x - 4$  si corrispondono in un'omotetia di centro  $O$ , le equazioni

di tale omotetia saranno:  $\sigma : \begin{cases} x' = ax \\ y' = ay \end{cases}$  da cui  $\sigma^{-1} : \begin{cases} x = \frac{x'}{a} \\ y = \frac{y'}{a} \end{cases}$ .

Trasformando la prima retta  $\sigma^{-1}$  abbiamo:  $\frac{y'}{a} = 1 + 2\frac{x'}{a} \Rightarrow y' = 2x' + a$ ; Dovendo quest'ultima coincidere

con  $s : y = 2x - 4$  si ha  $a = -4$  per cui si ha l'omotetia richiesta:  $\sigma : \begin{cases} x' = -4x \\ y' = -4y \end{cases}$ .

**Quesito n. 7**

Dato un numero naturale  $n$  maggiore di 1, si definisce fattoriale del numero  $n$  e si indica con  $n!$ , il prodotto dei primi  $n$  numeri naturali, cioè:  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$

Per definizione si pone:  $0! = 1$  e  $1! = 1$ .

Nel calcolo combinatorio il fattoriale di un numero  $n$  rappresenta il numero delle permutazioni semplici di  $n$  oggetti (si ricordi che una permutazione semplice è una disposizione semplice di  $n$  oggetti di classe  $n$ ). Il legame con i coefficienti binomiali si ricava dal fatto che la prima proprietà che si dimostra sui coefficienti binomiali  $C_{n,k} = \binom{n}{k}$  è proprio:  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ , detta anche *legge dei tre fattoriali*,

che si dimostra facilmente ricordando la formula che fornisce il numero delle combinazioni semplici a partire da  $n$  oggetti, di classe  $k$ , con  $k \leq n$ . Da questa si dimostrano anche tutte le altre proprietà.

**Quesito n. 8**

Date le equazioni parametriche della curva:  $\begin{cases} x = e^t + 2 \\ y = e^{-t} + 3 \end{cases}$ , ricaviamo  $e^t = x - 2$  dalla prima equazione e

sostituiamola nella seconda; si ottiene (tenendo conto che  $e^t > 0$  per ogni  $t$ ):

$$y = \frac{1}{x-2} + 3 = \frac{3x-5}{x-2}.$$

Si tratta di una curva nota (iperbole omografica) di asintoti le rette  $x = 2$  e  $y = 3$ .

Ricordiamo intanto che la retta tangente ad una curva in un suo punto ha equazione:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

La derivata della funzione è:  $f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} \Rightarrow f'(3) = -1$ .

Quindi la retta tangente nel punto  $(3, 4)$ , avrà per equazione  $y - 4 = -1(x - 3) \Rightarrow y = -x + 7$

**Quesito n.9**

Indichiamo con

$E_1 = \{\text{ottenere 10 lanciando due dadi}\};$

$E_2 = \{\text{ottenere due volte 10 lanciando 6 volte due dadi}\};$

$E_2 = \{\text{ottenere almeno due volte 10 lanciando 6 volte due dadi}\};$

Nel lancio di due dadi le possibilità sono 36; le coppie favorevoli sono  $(6, 4)$ ,  $(4, 6)$  e  $(5, 5)$ .

Quindi avremo:  $p(E_1) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

Per calcolare  $p(E_2)$  usiamo la distribuzione binomiale (o di Bernoulli)  $p(X = x) = \binom{n}{k} p^x q^{n-x}$ , per cui:

$$p(E_2) = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{12}\right)^2 \left(\frac{11}{12}\right)^4 = 15 \frac{11^4}{12^6} \approx 0,0735.$$

Per determinare la probabilità del terzo evento, conviene usare il teorema della probabilità contraria e calcolare prima la

$$p(X = 0) = \binom{6}{0} \left(\frac{1}{12}\right)^0 \left(\frac{11}{12}\right)^6 = \left(\frac{11}{12}\right)^6 \text{ e } p(X = 1) = \binom{6}{1} \left(\frac{1}{12}\right)^1 \left(\frac{11}{12}\right)^5 = 6 \left(\frac{1}{12}\right) \left(\frac{11}{12}\right)^5.$$

Quindi

$$p(E_2) = 1 - [p(X = 0) + p(X = 1)] \approx 0,0831.$$

### Quesito n.10

Intanto consideriamo il caso in cui il 40% =  $\frac{2}{5}$  della popolazione abbia 60 anni; in questo caso sia  $X$  l'età del 60% =  $\frac{3}{5}$  della popolazione.

Ricordando che  $\mu = \sum_{i=1}^n x_i f_i$ , per ottenere un'età media di 30 anni dovrà aversi:

$$\mu = 30 = \frac{2}{5} \cdot 60 + \frac{3}{5} \cdot X \Rightarrow X = 6 \cdot \frac{5}{3} = 10$$

Questo significa che se il restante 60% della popolazione ha 10 anni, l'età media in quel Paese è (può essere) di 30 anni.

Nel caso in cui l'età del 40% sia  $>60$ , l'altra età dovrà diminuire, ma il affinché l'età media possa essere di 30 anni, l'età del 40% della popolazione che ha più di 60 anni non può superare i 75 anni. Infatti indicata con  $M$  l'età del 40% della popolazione che ha 60 anni o più e con  $m$  l'età del 60% della popolazione che ha meno di 60 anni

$$\mu = 30 = \frac{2}{5} \cdot M + \frac{3}{5} \cdot m \text{ e quindi } \begin{cases} 2M + 3m = 150 \\ M \geq 60 \\ 0 < m < 60 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{150 - 2M}{3} \Rightarrow 0 < \frac{150 - 2M}{3} < 60, \text{ da cui:}$$

$$\begin{cases} M \geq 60 \\ \frac{150 - 2M}{3} < 60 \Rightarrow 60 \leq M < 75 \text{ (dove il limite sinistro di } M \text{ sarebbe } -15, \text{ ma abbiamo ovviamente preso)} \\ \frac{150 - 2M}{3} > 0 \end{cases}$$

in considerazione, per le condizioni precedenti, il valore minimo di 60 (anni).

Concludiamo con un esempio; se  $M=72 \Rightarrow m = \frac{150 - 2M}{3} = \frac{150 - 144}{3} = 2.$