

### Quesito n. 1

Il numero dei chicchi di grano disposti sulla scacchiera è dato dalla somma dei primi  $n$  termini di una progressione geometrica di ragione 2 ed  $n=64$

Si ha infatti:

$$S_n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n \text{ con}$$

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \Rightarrow S_{64} = 2^0 \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = 2^{64} - 1.$$

Indicato con  $P_g$  il peso totale espresso in grammi e  $P_{ton}$  quello espresso in tonnellate si ha:

$$P_{ton} = P_g \cdot 10^{-6} = [(2^{64} - 1) \cdot 38 \cdot 10^{-3}] \cdot 10^{-6} \simeq \frac{1,8447 \cdot 10^{19} \cdot 38}{10^9} \simeq \frac{7,0098 \cdot 10^{20}}{10^9} \simeq 7,0098 \cdot 10^{11}$$

### Quesito n. 2

Ricordiamo che i poliedri regolari sono, nello spazio, gli analoghi dei poligoni regolari sul piano, ma mentre i vi sono poligoni regolari aventi un qualsiasi numero di lati, il numero delle facce (e dei vertici) di un poliedro regolare, assume solamente valori particolari.

Infatti in ogni vertice di un poliedro regolare devono concorrere almeno tre facce costituite da poligoni regolari e la somma degli angoli delle facce che si incontrano in tali vertici deve essere strettamente minore di un angolo giro. Pertanto:

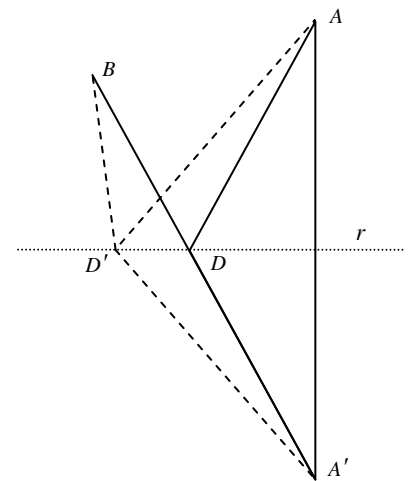
- se le facce che concorrono in un vertice sono triangoli equilateri (e quindi gli angoli di  $60^\circ$ ), si potranno avere tre casi: 3 facce (somma degli angoli uguale a  $180^\circ$ ), 4 facce (somma degli angoli uguale a  $240^\circ$ ), 5 facce (somma degli angoli uguale a  $300^\circ$ ). In corrispondenza a tali possibilità si trovano rispettivamente il TETRAEDRO (quattro triangoli equilateri), l'OTTAEDRO (otto triangoli equilateri), l'ICOSAEDRO (venti triangoli equilateri).
- se le facce che concorrono in un vertice sono quadrati (e quindi gli angoli di  $90^\circ$ ), si potrà avere solo un caso: 3 facce (somma degli angoli uguale a  $270^\circ$ ), cioè il caso del CUBO (o ESAEDRO).
- se le facce che concorrono in un vertice sono pentagoni regolari (e quindi gli angoli di  $108^\circ$ ) si potrà avere solo un caso: 3 facce (somma degli angoli uguale a  $324^\circ$ ), cioè il caso del DODECAEDRO (12 pentagoni regolari).

Non potranno aversi poliedri regolari aventi facce costituite da esagoni regolari (e quindi con angoli di  $120^\circ$ ), poiché la somma darebbe già  $360^\circ$ , mentre la somma degli angoli delle facce che si incontrano in tali vertici deve essere strettamente minore di un angolo giro.

### Quesito n. 3

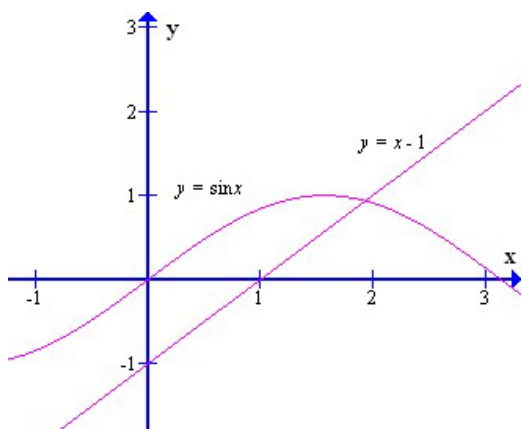
Per trovare il più breve cammino che congiunga  $A$  con  $B$  toccando  $r$ , si consideri il punto  $A'$  simmetrico di  $A$  rispetto alla retta  $r$ . La congiungente  $A'B$  interseca la retta  $r$  nel punto  $D$  in modo che il percorso  $ADB=AD+DB$  è quello di minimo cercato. Infatti preso un altro punto qualunque  $D'$  di  $r$  il percorso  $AD'+D'B > AD+DB$  per la proprietà dei triangoli che afferma che un lato è minore della somma degli altri due, in quanto:

$$AD' + D'B = A'D' + D'B > A'B = AD + DB$$



### Quesito n. 4

Dalla rappresentazione grafica delle funzioni  $y=\sin x$  e  $y=x-1$  si osserva



che esiste una ed una soluzione solo nell'intervallo  $c \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ .

Infatti per il teorema dell'esistenza degli zeri si ha che la funzione  $h(x) = \sin x - x + 1$  interseca l'asse delle  $x$  (cioè l'equazione  $\sin x - x + 1 = 0$  ha soluzione) poiché:

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 1 \simeq 0,43 > 0 \text{ e } h(\pi) = \sin \pi - \pi + 1 \simeq -2,14 < 0$$

$$\Rightarrow c \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[.$$

Usando il metodo di bisezione si ottiene:

$$h\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin \frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} + 1 \simeq -0,65 < 0 \Rightarrow c \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right[$$

$$h\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \sin\frac{5\pi}{8} - \frac{5\pi}{8} + 1 \simeq -0,04 < 0 \Rightarrow c \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}\right[$$

$$h\left(\frac{9\pi}{16}\right) = \sin\frac{9\pi}{16} - \frac{9\pi}{16} + 1 \simeq 0,21 > 0 \Rightarrow c \in \left]\frac{9\pi}{16}, \frac{5\pi}{8}\right[ \text{ e quindi } c \in ]1,77;1,96[ \text{ e infine si trova che } c \simeq 1,9346.$$

L'unicità della soluzione è confermata dal fatto che la  $h(x) = \sin x - x + 1$  definita nell'intervallo  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ , è derivabile due volte e ha la derivata seconda  $h''(x) = -\sin x$  sempre negativa in detto intervallo.

Per quanto riguarda la procedura si ha:

```

program bisezione;
uses crt;

var
  a,b,c,eps:real;
  n,z:integer;
function y(x:real):real;
begin
  y:=sinx-x+1
end;

begin
  clrscr;
  writeln('questo programma trova la soluzione x con 1.7<x<2.0');
  writeln('dell'equazione sinx-x+1=0 con un'approssimazione');
  writeln(' di 10^-n, utilizzando il metodo di bisezione ');
  writeln;
  write('n = ');
  readln(n);
  a:=1.7;
  b:=2.0;
  eps:=exp(-n*ln(10));
  begin
    if (y(a)*y(b))<0 then
      repeat
        begin
          c:=(a+b)/2;
          if y(a)*y(c)<0 then b:=c
            else a:=c;
        end;
      until abs(y(c))<eps;
      writeln;
      writeln('soluzione = ',c:0:n);
      readln
    end;
  end.

```

### Quesito n. 5

Ricordiamo la formula del binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}a^{n-k}b^k \quad (1).$$

La somma dei coefficienti sarà:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \text{ e ponendo } a = b = 1 \text{ nella (1) si ottiene:}$$

$$(1+1)^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1} \cdot 1 + \binom{n}{2}1^{n-2} \cdot 1^2 + \dots + \binom{n}{n-1}1 \cdot 1^{n-1} + \binom{n}{n}1^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}1^{n-k}1^k \Rightarrow 2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$