

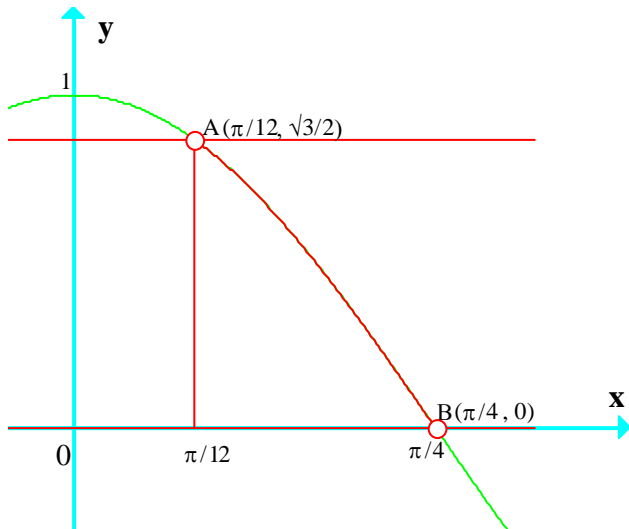
### Quesito n. 6

Dobbiamo vedere per quali valori di  $k \in \mathbb{R}$  l'equazione:  $k \cos 2x - 5k + 2 = 0$  ha soluzioni per  $15^\circ < x < 45^\circ$ .

Intanto  $k \neq 0$  (altrimenti si ha  $2=0$  e l'equazione è impossibile) e  $\cos 2x = \frac{5k-2}{k}$  con  $30^\circ < 2x < 90^\circ \Rightarrow$

$$\cos 90^\circ < \cos 2x = \frac{5k-2}{k} < \cos 30^\circ \Rightarrow \begin{cases} \frac{5k-2}{k} < \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{10k-4-\sqrt{3}k}{2k} < 0 \Rightarrow \frac{(10-\sqrt{3})k-4}{2k} < 0 \\ \frac{5k-2}{k} > 0 \end{cases}$$

Risolvendo le due disequazioni si ha: 
$$\begin{cases} 0 < k < \frac{4}{10-\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{2}{5} < k < \frac{4}{10-\sqrt{3}} \\ k < 0 \vee k > \frac{2}{5} \end{cases}$$



Oppure:

L'equazione  $\cos 2x = \frac{5k-2}{k}$  si può interpretare come

l'intersezione tra le curve  $y = \cos 2x$  e  $y = \frac{5k-2}{k}$  (fascio

di rette orizzontali) nell'intervallo  $\left] \frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{4} \right[$ ;

si ha:

retta per A:  $\frac{5k-2}{k} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow k = \frac{4}{10-\sqrt{3}}$ ;

retta per B:  $\frac{5k-2}{k} = 0 \Rightarrow k = \frac{2}{5}$ ;

si ottiene quindi: 1 soluz. per  $\frac{2}{5} < k < \frac{4}{10-\sqrt{3}}$

### Quesito n. 7

La risposta di Bruno De Finetti vuole significare che la probabilità non esiste come fatto oggettivo ma dipende dalle opinioni e dalle informazioni che si hanno di un evento ed è quindi il singolo individuo che stabilisce una misura di probabilità, sulla base del proprio grado di fiducia che un evento si verifichi. Una definizione operativa per un simile approccio alla probabilità, che è quindi da collegare alla definizione soggettiva della probabilità, è stata data proprio da B. De Finetti: "La probabilità di un evento **A**, secondo l'opinione di un dato individuo, è il prezzo **p** che egli stima equo attribuire ad un importo unitario esigibile, se **A** si verifica"

(quaderno di approfondimento: L.Scaglianti-M.Chiodi-A.Mangiarotti "Il modello non deterministico" Ed. CEDAM, pag. 121)

### Quesito n. 8

Considerato l'evento:  $A = \{\text{colpire il bersaglio}\}$ ,

si ha che la probabilità che il bersaglio sia colpito è:  $p(A) = p = 0,3$  e la probabilità che il bersaglio non sia colpito è:  $p(\bar{A}) = q = 0,7$ .

Per calcolare la probabilità che il bersaglio sia colpito almeno una volta, useremo la formula della probabilità dell'evento contrario, cioè :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

dove si è indicata con  $X$  la variabile aleatoria che descrive il numero di volte in cui il bersaglio viene colpito in  $n$  tiri effettuati.

Utilizzando l'espressione della distribuzione binomiale si ha:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} (0,3)^0 \cdot (0,7)^n = 1 - (0,7)^n :$$

Affinché la probabilità che il bersaglio sia colpito almeno una volta sia  $\geq 0,99$ , è quindi necessario che  $n$  verifichi la disequazione:

$$1 - (0,7)^n \geq 0,99 \Rightarrow (0,7)^n \leq 1 - 0,99 \Rightarrow n \log(0,7) \leq \log(0,01) \Rightarrow n \geq \frac{-2}{-0,1549} \approx 12,91$$

Quindi il numero minimo di tiri richiesto è 13.

### Quesito n. 9

Poiché la  $f(x)$  è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e coincide con la sua derivata prima, si ha:

$$f'(x) = f(x) \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int 1 dx \Rightarrow \ln|f(x)| = x + c$$

e quindi

$$\ln|f(x)| = x + c \Rightarrow |f(x)| = e^{x+c} = e^c \cdot e^x \Rightarrow f(x) = \pm e^c \cdot e^x = k \cdot e^x$$

dove si è posto  $\pm e^c = k$ .

Poiché inoltre  $f(0) = 1$  si ha  $f(x) = k \cdot e^x \Rightarrow 1 = k \cdot e^0 \Rightarrow k = 1$  e quindi la funzione richiesta è  $f(x) = e^x$ .

Si poteva giungere brevemente allo stesso risultato ricordando che  $f(x) = e^x$  è l'unica funzione (derivabile e sempre diversa da zero) che coincide con la sua derivata prima e passa per il punto (0,1).

### Quesito n. 10

Dalla verifica dell'uguaglianza, che è molto semplice in quanto:  $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0$ ,

si ottiene  $\pi = 4 \cdot \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$  e tale integrale può essere dunque utilizzato per il calcolo approssimato di  $\pi$ .

Si può utilizzare il metodo dei rettangoli e trovare approssimazioni per eccesso e per difetto, suddividendo l'intervallo  $[0, 1]$  di ampiezza 1 in  $n$  parti uguali, ponendo per semplicità  $n=4$ .

Sia quindi  $h = \frac{(b-a)}{n} = \frac{(1-0)}{4}$ , l'ampiezza dell'intervallo; una approssimazione per eccesso, dal momento che la funzione integranda è decrescente nell'intervallo  $[0,1]$ , si ottiene con la prima formula dei rettangoli:

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \simeq 4 \cdot \frac{1}{4} \left[ f(0) + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{2}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) \right] = 1 \left[ 1 + \frac{16}{17} + \frac{4}{5} + \frac{16}{25} \right] = \frac{1437}{425} \simeq 3,38,$$

ed una approssimazione per difetto, dal momento che la funzione integranda è decrescente nell'intervallo  $[0,1]$ , si ottiene con la seconda formula dei rettangoli:

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \simeq 4 \cdot \frac{1}{4} \left[ f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{2}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1) \right] = 1 \left[ \frac{16}{17} + \frac{4}{5} + \frac{16}{25} + \frac{1}{2} \right] = \frac{2449}{850} \simeq 2,88$$

e quindi  $2,88 < \pi < 3,38$  con un'approssimazione assai modesta tenuto conto del limitato numero di intervalli.

Ovviamente l'approssimazione sarà migliore aumentando il numero degli intervalli, per es. ponendo  $n=10$  e ripetendo il procedimento sopra indicato, oppure usando una formula di approssimazione più efficiente come quella dei trapezi o delle parabole (o di cavalieri-Simpson).