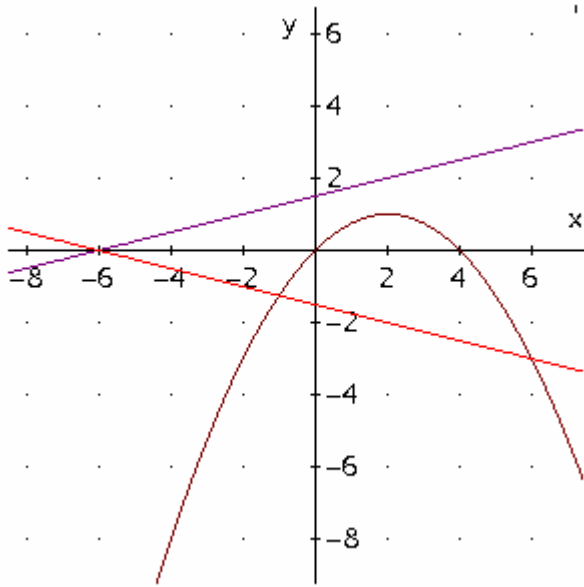


RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 1 (PNI)

Le curve assegnate λ e r sono rispettivamente una parabola ed una retta che, riportate in forma esplicita hanno equazione: $\lambda: y = -\frac{1}{4}x^2 + x$ ed $r: y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$.

La parabola, con asse parallelo all'asse y e rivolta verso il basso, ha vertice in $V(2; 1)$ ed incontra gli assi in $O(0; 0)$ e $A(4; 0)$; la retta incontra invece gli assi in $B(-6; 0)$ e $D\left(0; \frac{3}{2}\right)$.



Punto 1

Per provare che le due curve non hanno punti comuni

bisognerà impostare il sistema
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x^2 + x \\ y = \frac{x}{4} + \frac{3}{2} \end{cases} \quad e$$

verificare che non ammette soluzioni reali, cioè che l'equazione risolvete il sistema stesso:

$$-\frac{1}{4}x^2 + x = \frac{x}{4} + \frac{3}{2} \Rightarrow x^2 - 3x + 6 = 0$$

ha discriminante negativo (cioè non vi sono soluzioni reali).

Infatti si ha: $x^2 - 3x + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 24 < 0$

Punto 2

Posto $P\left(t; -\frac{1}{4}t^2 + t\right)$ un punto generico di λ , la sua

$$\text{distanza da } r \text{ sarà } d(t) = \frac{\frac{1}{4} \cdot t + \frac{3}{2} + \frac{1}{4}t^2 - t}{\sqrt{1 + \frac{1}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{17}}(t^2 - 3t + 6);$$

(N.B. si osservi che nella formula usata: $d = \frac{|mx_0 + q - y_0|}{\sqrt{1 + m^2}}$ abbiamo tralasciato il valore assoluto in

quanto il punto giace al di sotto della retta.)

La funzione (distanza) è una parabola rivolta verso l'alto per cui sarà minima per l'ascissa del vertice, cioè $t = \frac{3}{2}$ e tale distanza minima vale $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{68}\sqrt{17}$; il punto cercato sarà allora $P\left(\frac{3}{2}; \frac{15}{16}\right)$

Punto 3

Le equazioni della simmetria rispetto all'asse delle x sono $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ e quindi l'equazione della retta s

simmetrica di r rispetto a tale asse sarà $y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$.

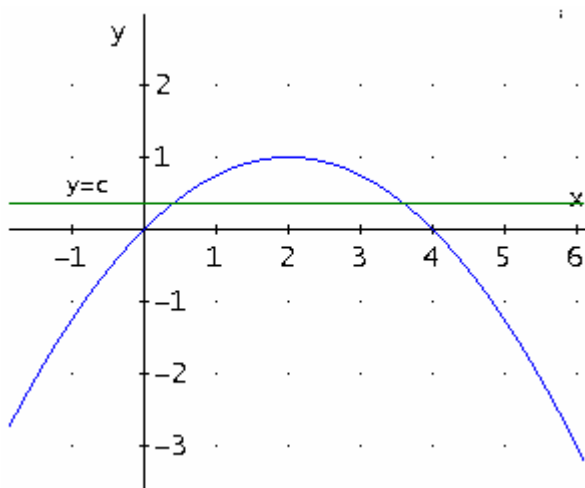
Troviamo adesso le intersezioni tra la parabola λ e la retta s . Si ha:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x^2 + x \\ y = -\frac{x}{4} - \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \text{ da cui la retta interseca la parabola nei punti di ascissa } -1 \text{ e } 6 \text{ e}$$

precisamente nei punti $\left(-1; -\frac{5}{4}\right)$ e $(6; -3)$.

Per calcolare l'area della regione di piano racchiusa dalla parabola λ e la retta s si ha:

$$\int_{-1}^6 \left[-\frac{1}{4}x^2 + x - \left(-\frac{x}{4} - \frac{3}{2} \right) \right] dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^6 (-x^2 + 5x + 6) dx = \dots = \frac{343}{24}$$



Punto 4

Poiché l'area del segmento parabolico, applicando la

formula di Archimede $S = \frac{2}{3} \cdot b \cdot h$, vale:

$$S = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 1 = \frac{8}{3}, \text{ la sua metà varrà } S' = \frac{S}{2} = \frac{4}{3}.$$

Troviamo ora le intersezioni tra la retta $y = c$ e la parabola; facilmente si ha l'equazione risolvibile

$$x^2 - 4x + 4c = 0 \Rightarrow x = 2 \mp 2\sqrt{1-c};$$

applicando nuovamente la formula di Archimede si ha:

$$b = 4\sqrt{1-c} \text{ e } h = 1-c \text{ per cui}$$

$$S' = \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \cdot 4\sqrt{1-c} \cdot (1-c) \Rightarrow \sqrt{(1-c)^3} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1-c = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \Rightarrow c = 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \simeq 0,37$$

Punto 5

Per calcolare il volume del solido richiesto si calcolerà dovremo integrare l'area del quadrato che ha per lato la funzione tra $x=0$ e $x=4$.

$$\text{Si ha quindi: } \int_0^4 \left(-\frac{1}{4}x^2 + x \right)^2 dx = \int_0^4 \left(\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x^2 \right) dx = \dots \left[\frac{x^5}{80} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = \frac{32}{15}.$$