RISOLUZIONE DEL PROBLEMA 2

Punto 1

Poiché, pur non specificato nel testo, si intende $\log x$ in base e, da questo momento scriveremo $\ln x$.

La funzione data $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1 \quad \text{per } x>0 \end{cases}$, è una funzione "definita a tratti", definita nell'intervallo $[0;\,+\infty[$, derivabile per $x>0$, perché somma o prodotto di funzioni derivabili, e pertanto anche continua.

Dobbiamo verificare la continuità e la derivabilità nel punto $x=0$.

Intanto la funzione è continua in $x=0$ poiché si ha:

$f(0)=1=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1\right]$, dove per calcolare il limite abbiamo sfruttato il limite notevole $\lim_{x\to0^+} x^2\ln x=0$, da calcolarsi eventualmente con la regola di De l'Hospital.

Per quanto riguarda la derivabilità, intanto si ha:

$$f'(x)=x(3-2\ln x)+\frac{1}{2}x^2\left(-\frac{2}{x}\right)=2x(1-\ln x)$$

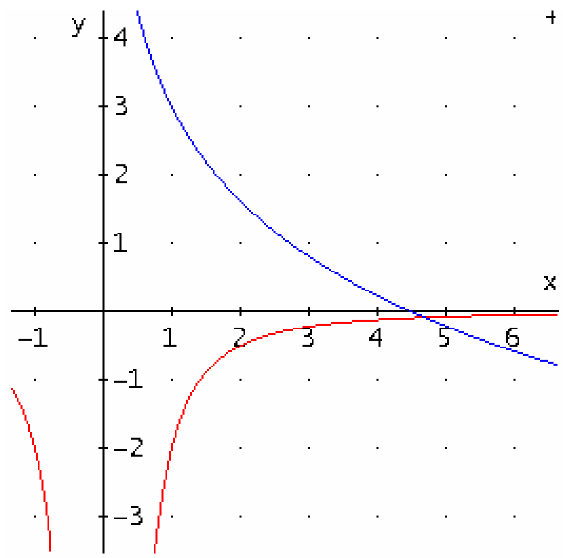
che ovviamente non esiste per $x=0$.

Si ha però:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+} f'(x)=2x(1-\ln x)=0 \text{ (sempre sfruttando il limite notevole),}$$

per cui dunque si può prolungare la derivata prima per continuità anche nel punto $x=0$, definendo la derivata prima come segue:

$$\begin{cases} f'(0)=0 \\ f'(x)=2x(1-\ln x) \quad \text{per } x>0 \end{cases}$$



Punto 2

Dobbiamo ora dimostrare che l'equazione $f(x)=0$ ammette un'unica radice in $[0;\,+\infty[$.

Poiché $\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1=0$ equivale a $3-2\ln x=-\frac{2}{x^2}$, basterà far vedere che le due curve si incontrano in un unico punto. Dal confronto dei loro grafici (le curve sono facilmente rappresentabili per simmetrie, dilatazioni e traslazioni), si osserva che effettivamente si incontrano in un unico punto di ascissa $\alpha>e^{\frac{3}{2}}\simeq 4{,}48$.

Per quanto riguarda l'approssimazione richiesta, intanto verifichiamo, applicando il teorema dell'esistenza degli zeri, che la soluzione appartiene all'intervallo $]4;5[$.

Si ha infatti: $f(4)=2{,}8193>0$ e $f(5)=-1{,}7359<0$

Per quanto riguarda gli ulteriori calcoli riportiamo la tabella in excel:

y = (1/2)x^2(3-2lnx)+1 **err=1/1000 =0,001**

a	b	(a+b)/2	f(a)	f(b)	f((a+b)/2)	b-a	b-a<err?	numero bisezioni
4,00000	5,00000	4,50000	2,81929	-1,73595	0,91743	1,00000		
4,50000	5,00000	4,75000	0,91743	-1,73595	-0,31189	0,50000	no	1
4,50000	4,75000	4,62500	0,91743	-0,31189	0,32670	0,25000	no	2
4,62500	4,75000	4,68750	0,32670	-0,31189	0,01344	0,12500	no	3
4,68750	4,75000	4,71875	0,01344	-0,31189	-0,14771	0,06250	no	4

4,68750	4,71875	4,70313	0,01344	-0,14771	-0,06676	0,03125	no	5
4,68750	4,70313	4,69531	0,01344	-0,06676	-0,02656	0,01563	no	6
4,68750	4,69531	4,69141	0,01344	-0,02656	-0,00654	0,00781	no	7
4,68750	4,69141	4,68945	0,01344	-0,00654	0,00346	0,00391	no	8
4,68945	4,69141	4,69043	0,00346	-0,00654	-0,00154	0,00195	no	9
4,68945	4,69043		0,00346	-0,00154	0,00096	0,00098	stop	10

Pertanto esiste una ed un sola radice reale $\alpha \simeq 4{,}69$...

Punto 3

A questo punto andiamo a disegnare il grafico C della curva data.

<u>*Dominio*</u>: $[0;\ +\infty[$,

<u>*Intersezioni con gli assi*</u>: L'intersezione con l'asse y è $y=1$; la intersezione con l'asse x è, come già visto, $\alpha \simeq 4{,}69$.

<u>*Studio del segno:*</u> Dalla rappresentazione grafica si ha che $f(x) > 0 \Rightarrow 3 - 2\ln x > -\dfrac{2}{x^2}$ e quindi $f(x) > 0$ per $x > \alpha \simeq 4{,}69$

<u>*Comportamento agli estremi del dominio:*</u>

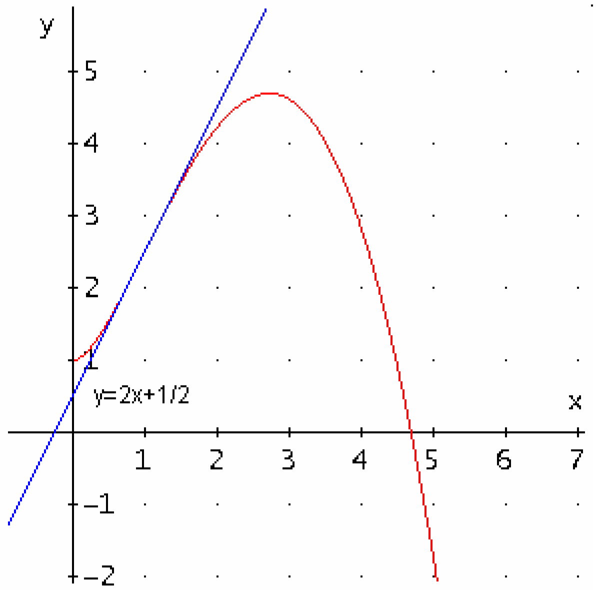
Come già osservato $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ e inoltre $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \cdot (-\infty) = -\infty$.

<u>*Eventuali asintoti*</u>:

la funzione può presentare eventualmente solo un asintoto obliquo per $x \to +\infty$; si ha

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x(3-2\ln x) + \frac{1}{x} = +\infty\cdot(-\infty)+0 = -\infty$$

e quindi non ha asintoti di alcun genere.



<u>*Derivata prima*</u>:

Come già trovato $f'(x) = 2x(1-\ln x) \Rightarrow f'(x) = 0$ per $x = 0$ (n.a., ma comunque punto a tangente orizzontale) e $x = e$.

<u>*Crescita e decrescita*</u>:

$f'(x) = 2x(1-\ln x) > 0$ per $0 < x < e \Rightarrow$ $M\left(e; \dfrac{e^2}{2} + 1 \simeq 4{,}69\right)$ è un punto di massimo relativo.

<u>*Derivata seconda:*</u>

$f''(x) = 2(1-\ln x) - 2x\dfrac{1}{x} = -2\ln x$ che si annulla per $x = 1$.

<u>*Concavità e convessità:*</u>

$f''(x) = -2\ln x > 0$ per $0 < x < 1 \Rightarrow F\left(1; \dfrac{5}{2}\right)$ è punto di flesso.

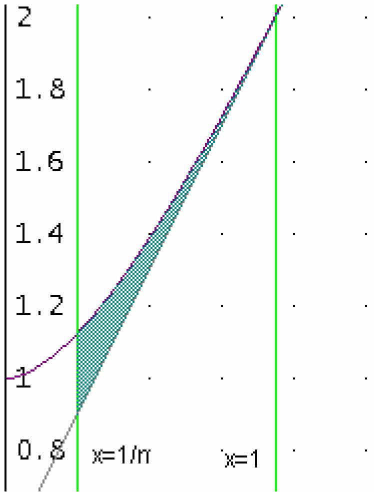
Determiniamo ora l'equazione della retta tangente nel punto $F\left(1; \dfrac{5}{2}\right)$.

Poiché $f'(1) = 2$ si ha: $y - \dfrac{5}{2} = f'(1)(x-1) = 2x + \dfrac{1}{2}$.

Punto 4

Per calcolare l'area richiesta, si ha:

$A_n = \displaystyle\int_{1/n}^{1} \left[\frac{1}{2}x^2(3-2\ln x)+1-\left(2x+\frac{1}{2}\right)\right]dx$ e dopo aver integrato per scomposizione e per parti $A_n = \left[\dfrac{11}{18}x^3 + \dfrac{1}{2}x - x^2 - \dfrac{x^3}{3}\ln x\right]_{1/n}^{1} \Rightarrow A_n = \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{11}{18n^3} + \dfrac{1}{3n^3}\ln\dfrac{1}{n}$.



Punto 5

Il limite di tale area è:

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \frac{1}{9},$$

in quanto tutti gli altri termini tendono a zero per $x \to +\infty$.

In particolare:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3n^3}\ln\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3n^2} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3n^2} \cdot \lim_{\frac{1}{n}\to 0} \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}$$ ove,

quest'ultimo è un limite notevole che tende a zero.

Tale limite rappresenta l'area della regione di piano compresa tra la curva, la tangente di flesso e l'asse delle ordinate (in quanto per $n \to +\infty$ la retta $x = \frac{1}{n}$ tende alla retta x=0, cioè all'asse delle ordinate).