

## SOLUZIONE PROBLEMA 1

Impostiamo il sistema: 
$$\begin{cases} x + y = a \\ \frac{x}{y} = a \end{cases} \quad \text{con } a \neq 0$$

1. Si hanno due fasci di rette, il primo a centro improprio (rette parallele alla bisettrice del II e IV quadrante, con esclusione della retta passante per l'origine) e il secondo a centro proprio (rette passanti per l'origine, con esclusione dell'asse  $y$ , retta verticale). Il sistema non ha soluzione (sistema impossibile) nel caso in cui  $a = -1$ ; in tal caso le rette sono parallele distinte.
2. Eliminando il parametro  $a$  si ottiene il luogo richiesto. Facilmente si ha:  

$$x + y = \frac{x}{y} \Rightarrow y^2 + xy - x = 0 \quad \text{con } y \neq 0 \text{ e } x \neq 0$$
 (privato dell'origine; *la rappresenteremo comunque senza tener conto delle limitazioni imposte dal problema*).

3. Tale curva è un'iperbole, come si può facilmente verificare, di centro  $(-2, 1)$ . Studiandola come unione di due funzioni si ha: 
$$y = -\frac{x}{2} \pm \frac{\sqrt{x^2 + 4x}}{2}$$
 con dominio  $D = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -4 \vee x \geq 0\}$ , cioè è formata dalla parte di iperbole che giace al di sopra o al di sotto del suo diametro  $y = -\frac{x}{2}$ . Sappiamo che le tangenti condotte per l'intersezione del diametro con la curva sono parallele (in questo caso sono entrambe verticali in quanto basta anche osservare che  $x=0$  e  $x=-4$  sono punti di non derivabilità) e in  $(-4, 2)$  e  $(0, 0)$  sono i vertici dell'iperbole.

Per rappresentarla a questo punto occorrono solamente gli asintoti che, poiché il dominio della funzione non è sempre definito, dovranno essere necessariamente uno orizzontale ed uno obliquo: considerando ad esempio la parte di iperbole che giace al di sopra della retta  $y = -\frac{x}{2}$ , si ottiene:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2 + 4x}}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{x}{2} + \frac{x}{2} \right) = f.i., \text{ per cui razionalizzando il numeratore si ottiene}$$

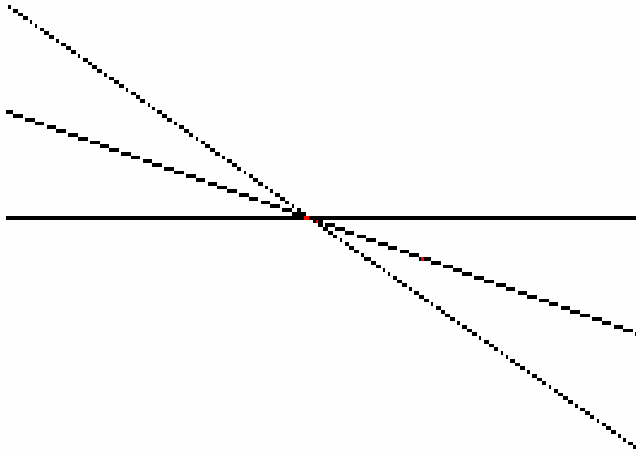
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( -\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2 + 4x}}{2} \right) \left( -\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{x^2 + 4x}}{2} \right)}{\left( -\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{x^2 + 4x}}{2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-\frac{4x}{4}}{-\frac{x}{2} - \frac{x}{2}} \right) = 1 \Rightarrow y=1 \text{ asintoto}$$

orizzontale (a destra per la funzione, parte di iperbole).

Inoltre poiché: 
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2 + 4x}}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{x}{2} - \frac{x}{2} \right) = -\infty$$
, cerco l'asintoto obliquo.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2 + 4x}}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-\frac{x}{2} - \frac{x}{2}}{x} \right) = -1 \quad e$$

$$q = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2 + 4x}}{2} + x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( +\frac{x}{2} - \frac{x}{2} \right) = f.i.$$
 e razionalizzando il numeratore, con il



procedimento sopra riportato, si ha  $q=-1$ , per cui l'altro asintoto (a sinistra se considero la funzione) ha equazione  $y = -x - 1$ . La rappresentazione grafica di  $\gamma$  è mostrata in figura.

Per quanto riguarda la  $\gamma'$ , basterà scambiare la  $x$  con la  $y$ , cioè applicare

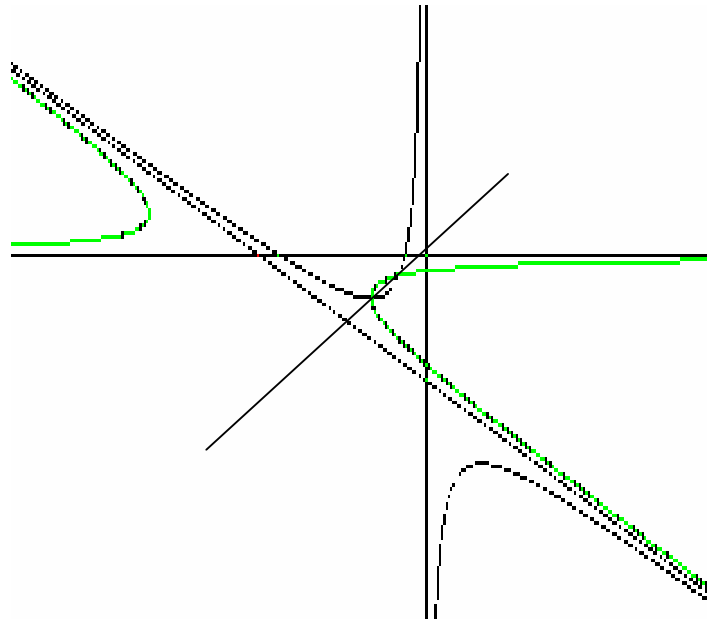
la trasformazione:  $\begin{cases} x = y' \\ y = x' \end{cases}$  e, a meno

degli apici, si ottiene

$$x^2 + yx - y = 0 \Rightarrow y = \frac{x^2}{1-x}$$

che è ovviamente un'iperbole con asintoto obliquo che ha come asintoti le rette  $x=1$  e  $x=-y+1$  (retta globalmente

invariante) e scambia la  $x$  con la  $y$  nelle coordinate del vertice (che diventano massimo e minimo per la funzione) di coordinate  $M(2,-4)$  e  $m(0,0)$ . Vale la pena ancora ricordare che nel grafico, per le limitazioni imposte dal problema, non andrebbe considerata l'origine. Nel grafico sotto riportato si possono notare entrambe le curve e l'area tra esse compresa.



4. Per calcolare l'area compresa tra  $\gamma$  e  $\gamma'$ , basterà calcolare l'area compresa tra la bisettrice  $y=x$  e la  $\gamma'$  e raddoppiarla. Trovato il punto  $P\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$  di intersezione tra  $y=x$  e  $\gamma'$  si ha quindi:

$$S = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left( x - \frac{x^2}{1-x} \right) dx = \dots = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left( x + x + 1 + \frac{1}{x-1} \right) dx = \dots = \frac{3}{2} - 2 \ln 2 \cong 0,1137.$$

Per trovare l'area richiesta troveremo l'area del triangolo  $OPH$  ( $H$  proiezione di  $P$  sull'asse  $x$ ), toglieremo l'area (ottenuta con il metodo dei trapezi con  $n=4$ ) del triangolo mistilineo  $OPH$  considerato sulla  $\gamma'$  e raddoppieremo il risultato ottenuto.

$$\text{L'area del triangolo } OPH \text{ è } S_{(OPH)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Il passo di integrazione sarà:  $\frac{b-a}{n} = \frac{\frac{1}{2} - 0}{4} = \frac{1}{8} = 0,125$ , e costruita la tabella

$n$	$x$	$y$
0	0	0
1	1/8	1/56
2	2/8	1/12
3	3/8	9/40
4	4/8	1/2

applicando la formula e svolgendo i calcoli si ottiene:

$$S_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{1-x} dx \cong \frac{b-a}{n} \cdot \left( \frac{y_0 + y_4}{2} + y_1 + y_2 + y_3 \right) = \frac{1}{8} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{56} + \frac{1}{12} + \frac{9}{40} \right) = \frac{121}{1680} \cong 0,0720.$$

Si ha infine:  $S_2 = 2(S_{(OPH)} - S') = 2\left(\frac{1}{8} - \frac{121}{1680}\right) \cong 2(0,125 - 0,0720) \cong 2 \cdot 0,0530 \cong 0,1060$  che

è un'approssimazione dell'area  $S$  trovata.  
(che pubblicheremo successivamente).

5. Non è molto chiara la domanda n.5.

Sostituendo all'inizio  $x=1$  otteniamo l'equazione in  $y$ :  $y^2 + y - 1 = 0$ .

Si ottiene quindi:  $y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . Nel caso di soluzione positiva  $y$  è la sezione aurea di  $x=1$ .

Si può avere comunque anche una importante interpretazione geometrica (specialmente se nel testo  $y$  sta per  $\gamma$ ) osservando che per  $x=1$  si ha  $y^2 + y - 1 = 0$  che rappresenta una conica

degenera (parabola), formata da due rette parallele distinte  $y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .