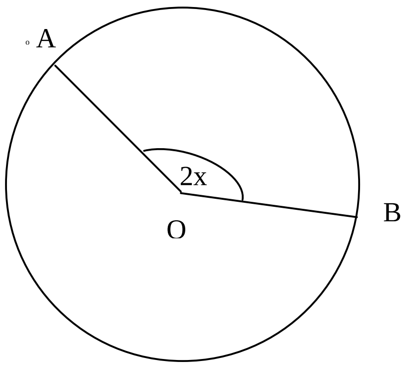
SOLUZIONE PROBLEMA 2

1. Posto OA=OB=1, sia AOB il settore circolare con angolo al centro uguale a $2x$ che costituisce lo sviluppo della superficie del cono V; il corrispondente arco AB sarà allora la circonferenza di base del cono, OA=OB=1 l'apotema del cono stesso.



La circonferenza di base (arco AB) sarà uguale a
$Circ = \overline{AO} \cdot A\hat{O}B = 1 \cdot 2x = 2x$ (*si ricordi che la misura di un arco di circonferenza è data dal prodotto della misura, in radianti, del corrispondente angolo al centro per la misura del raggio*).
Indicando con r il raggio della circonferenza di base, potremo ricavare la sua misura dalla conoscenza della circonferenza. Si ha: $r = \frac{2x}{2\pi} = \frac{x}{\pi}$.
Essendo uguale ad 1 l'apotema, l'altezza h del cono sarà:
$h = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\pi}\right)^2} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\pi^2 - x^2}$ e quindi il volume V richiesto:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \left(\frac{x}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{\pi}\sqrt{\pi^2 - x^2} = \frac{1}{3\pi^2} x^2 \sqrt{\pi^2 - x^2} \quad .$$

La funzione volume, in cui si dovrà avere $0 \le x \le \pi$, deve essere resa massima, per cui:
$V' = \frac{1}{3\pi^2}\left(2x\sqrt{\pi^2 - x^2} - \frac{2x^3}{2\sqrt{\pi^2 - x^2}}\right) = \frac{1}{3\pi^2}\left(\frac{2\pi^2 x - 3x^3}{\sqrt{\pi^2 - x^2}}\right)$. Dalla crescita e decrescita della funzione si ottiene: $x\left(2\pi^2 - 3x^2\right) > 0$ da cui, con facili calcoli, si ha che la funzione è massima per $x = \pi\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\pi}{3}\sqrt{6}$ ed il volume massimo $V\left(\frac{\pi}{3}\sqrt{6}\right) = \frac{1}{3\pi^2}\frac{2}{3}\pi^2\sqrt{\pi^2 - \frac{2}{3}\pi^2} = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\pi = \frac{2}{27}\sqrt{3}\pi$.

A questo punto si ottiene l'arco $AB = Circ = 2x = \frac{2}{3}\sqrt{6}\,\pi =$ ampiezza angolo al centro. Per quanto riguarda l'area della superficie del settore circolare (uguale all'area laterale del cono), si ottiene:

$$S_L = \pi \cdot \frac{x}{\pi} \cdot 1 = x = \frac{\pi}{3}\sqrt{6} \text{ per cui } \frac{SL = A_{SETTORE}}{A_{CERCHIO}} = \frac{\frac{\pi}{3}\sqrt{6}}{\pi \cdot 1^2} = \frac{\sqrt{6}}{3} = 0{,}8165 = 81{,}65\%.$$

Il settore circolare, sviluppo del secondo cono, ha angolo al centro uguale a $2\pi - 2x$, apotema uguale ad 1 e la circonferenza di base: $Circ_2 = \overline{AO} \cdot A\hat{O}B = 1 \cdot (2\pi - 2x) = 2(\pi - x)$, dalla quale si ricava il raggio $r_2 = \frac{2(\pi - x)}{2\pi} = \frac{\pi - x}{\pi}$. L'altezza h_2 sarà data da: $h_2 = \sqrt{1 - \frac{(\pi - x)^2}{\pi^2}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{2\pi x - x^2}$.

Infine il volume: $V_2 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{\pi - x}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{1}{\pi}\sqrt{2\pi x - x^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi - x}{\pi}\right)^2\sqrt{2\pi x - x^2}$ e con $x = \frac{\pi}{3}\sqrt{6}$ si ottiene $V_2\left(\frac{\pi}{3}\sqrt{6}\right) = \frac{1}{3\pi^2}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\sqrt{6}\right)^2\sqrt{\frac{2\pi^2}{3}\sqrt{6} - \frac{2}{3}\pi^2} = \frac{\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\sqrt{6}\right)^2\sqrt{\frac{2}{3}\left(\sqrt{6} - 1\right)}$.

2. Essendo il metro l'unità di misura assegnata, i volumi saranno espressi in m^3, per cui i volumi trovati andranno sommati e poi moltiplicati per mille ($1\ m^3 = 10^3 dm^3$).

3. Considerando il triangolo rettangolo formato da raggio di base del cono, apotema ed altezza, si ha: $a\sin\gamma = r \Rightarrow \sin\gamma = \frac{r}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3} = 0{,}8165 \Rightarrow \gamma = 54{,}74°$, valore trovato con la calcolatrice.
   Se vogliamo trovare un'approssimazione (ad es. a meno di un centesimo) con un metodo numerico, usiamo il *metodo di bisezione* (*o dicotomico*) dopo aver verificato l'applicabilità del *teorema dell'esistenza degli zeri*; dobbiamo quindi risolvere l'equazione: $\sin x - \frac{\sqrt{6}}{3} = 0$ e poiché $\frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0{,}707 < \frac{\sqrt{6}}{3} \cong 0{,}816 < \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0{,}866$, possiamo affermare che l'angolo $\gamma = x$ è compreso tra 45° e 60°.
   Per brevità usiamo il programma excel:

y=sinx-√6/3 **err=1/100=0,01**

a	b	(a+b)/2	f(a)	f(b)	f((a+b)/2)	b-a	b-a<err?	n.bisezioni
45,0000	60,0000	52,5000	-0,10939	0,04953	-0,02314	15,000	no	
52,5000	60,0000	56,2500	-0,02314	0,04953	0,01497	7,500	no	1
52,5000	56,2500	54,3750	-0,02314	0,01497	-0,00365	3,750	no	2
54,3750	56,2500	55,3125	-0,00365	0,01497	0,00577	1,875	no	3
54,3750	55,3125	54,8438	-0,00365	0,00577	0,00109	0,938	no	4
54,3750	54,8438	54,6094	-0,00365	0,00109	-0,00127	0,469	no	5
54,6094	54,8438	54,7266	-0,00127	0,00109	-0,00009	0,234	no	6
54,7266	54,8438	54,7852	-0,00009	0,00109	0,00050	0,117	no	7
54,7266	54,7852	54,7559	-0,00009	0,00050	0,00020	0,059	no	8
54,7266	54,7559	54,7412	-0,00009	0,00020	0,00006	0,029	no	9
54,7266	54,7412	54,7339	-0,00009	0,00006	-0,00002	0,015	no	10
54,7339	54,7412		-0,00002	0,00006		0,007	stop	

Abbiamo un'approssimazione 54,7339° per difetto e 54,7412° per eccesso