

## Soluzione Problema I

1. se  $l$  è la misura del perimetro del rettangolo (e quindi  $\frac{l}{2}$  quella del semiperimetro), la misura dei lati dello stesso sarà  $x$  ed  $\frac{l}{2} - x$ .

L'area è dunque:

$$S(x) = x \left( \frac{l}{2} - x \right) = -x^2 + \frac{l}{2}x.$$

La funzione da rendere massima è una parabola con la concavità rivolta verso il basso, per cui sarà massima per il valore dell'ascissa del vertice, cioè  $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{l}{2} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) = \frac{l}{4}$  e quindi in corrispondenza del rettangolo con i lati tutti uguali a  $l/4$ , ovvero un quadrato.

**N.B.** Si ricordi che dati due numeri di somma costante (in questo caso base ed altezza di un rettangolo di semiperimetro  $l/2$ ) il loro prodotto (area) è massimo quando i due numeri sono uguali (e quindi il rettangolo è un quadrato).

2. Sia  $x$  la lunghezza della porzione di filo con cui si delimita l'aiuola circolare (circonferenza) e  $l-x$  quella della porzione di filo che delimita l'aiuola quadrata (perimetro). Allora

$x = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{x}{2\pi}$  è il raggio dell'aiuola circolare e  $l-x = 4L \Rightarrow L = \frac{l-x}{4}$  è il lato dell'aiuola quadrata, con  $0 < x < l$ .

Si considera allora la funzione  $Y(x)$ , somma delle aree, data da:

$$Y(x) = \pi R^2 + L^2 = \pi \left( \frac{x}{2\pi} \right)^2 + \left( \frac{l-x}{4} \right)^2 = \frac{(4+\pi)x^2 - 2\pi lx + \pi l^2}{16\pi}.$$

- Ancora una volta la funzione da studiare è una parabola (con la concavità rivolta verso l'alto) per cui, senza ricorrere alle derivate tale funzione è minima per il valore dell'ascissa del vertice, cioè per  $x = -\frac{b}{2a} = \frac{\pi l}{4+\pi}$  e la somma delle aree minima vale:

$$Y\left(\frac{\pi l}{4+\pi}\right) = \frac{l^2}{4(4+\pi)}.$$

- La funzione  $Y(x)$  non presenta massimi nell'intervallo  $0 < x < l$  (casi in cui esistono sia l'aiuola quadrata che quella circolare); esaminando allora le posizioni limite della funzione somma (casi in cui  $x \rightarrow 0$  oppure  $x \rightarrow l$ , e quindi si ha rispettivamente solo l'aiuola quadrata o solo quella circolare, si ottiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} Y(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4+\pi)x^2 - 2\pi lx + \pi l^2}{16\pi} = \frac{l^2}{16} \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow l} Y(x) = \lim_{x \rightarrow l} \frac{(4+\pi)x^2 - 2\pi lx + \pi l^2}{16\pi} = \frac{l^2}{4\pi}$$

Per cui la  $Y(x)$ , somma delle aree, è massima per  $x \rightarrow l$ , cioè quando tutto il filo è utilizzato per l'aiuola circolare.

3. Infine chiamate  $a$ ,  $b$ ,  $c$  le lunghezze del parallelepipedo rettangolo iniziale e  $\left(a + \frac{1}{10}a\right) = \frac{11}{10}a$ ,

$\left(b + \frac{1}{10}b\right) = \frac{11}{10}b$  e  $\left(c + \frac{1}{10}c\right) = \frac{11}{10}c$  quelle del parallelepipedo modificato, il volume del primo è

$V = a \cdot b \cdot c$  e il volume  $V_1$  del secondo è  $V_1 = \frac{11}{10}a \cdot \frac{11}{10}b \cdot \frac{11}{10}c = \frac{1331}{1000}a \cdot b \cdot c \Rightarrow V_1 = 1,331 \cdot V$  e con un

incremento  $\Delta V = V_1 - V = 1,331 \cdot V - V = 0,331 \cdot V$ ; dunque del 33.1 % rispetto al primo.