## Soluzione Problema 2

1. Intanto notiamo che la $g(x)$ è una parabola di vertice $O$ (origine degli assi) con concavità rivolta verso l'alto per $a>0$ (che si "contrae" rispetto all'asse $x$ all'aumentare del valore di $a$), con concavità rivolta verso il basso per $a<0$ e degenera in una retta (asse delle ascisse) per $a=0$.

Ricordiamo inoltre che due curve sono tangenti tra di loro se hanno una retta tangente in comune; pertanto per determinare il valore del parametro $a$ per cui i grafici delle funzioni $f(x)=\ln x$ e $g(x)=ax^2$, risultano tangenti, basterà risolvere il sistema: $\begin{cases} f'(x)=g'(x) \\ f(x)=g(x) \end{cases}$.

Calcoliamo intanto le due derivate prime; si ottiene:

$$f'(x)=\frac{1}{x} \text{ e } g'(x)=2ax$$

Dall'uguaglianza di tali derivate (coefficienti angolari nel punto comune di ascissa $x$) si ha:

$$\frac{1}{x}=2ax \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

Sostituito tale valore nell'equazione della parabola otteniamo:

$$g(x)=g\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)=a\cdot\frac{1}{2a}=\frac{1}{2}=\ln x=f(x) \text{ e quindi } \ln x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$

Ne segue che $T\left(\sqrt{e};\frac{1}{2}\right)$ è il punto di tangenza ed

$$f'(\sqrt{e})=\frac{1}{\sqrt{e}}=2a\sqrt{e}=g'(\sqrt{e})\Rightarrow a=\frac{1}{2e}$$

Quindi, per quanto osservato precedentemente, l'equazione $lnx=ax^2$ ammette: -

- una soluzione per $a\le 0$;
- due soluzioni distinte per $0<a<\frac{1}{2e}$
- due soluzioni coincidenti per $a=\frac{1}{2e}$
- nessuna soluzione per $a>\frac{1}{2e}$

2.

2. Le due curve si intersecano in: $\begin{cases} y=\ln x \\ y=-e^2x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{e} \\ y=-1 \end{cases}$, per cui per trovare l'area richiesta, calcoliamo prima le intersezioni tra la retta $y=-2$ e le curve date (con $x>0$) e quindi la calcoleremo come somma di due integrali (occorre dividere la regione in due parti!):

Si ha: $\begin{cases} y=-2 \\ y=\ln x \end{cases} \Rightarrow x=e^{-2}$ e $\begin{cases} y=-2 \\ y=-e^2x^2 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{e}$ (la sol. negativa non è accettabile).

Si ha quindi:

$$S=\int_{e^{-2}}^{e^{-1}}(\ln x+2)dx+\int_{e^{-1}}^{\sqrt{2}e^{-1}}\left(-e^2x^2+2\right)dx=\left[x\ln x-x+2x\right]_{e^{-2}}^{e^{-1}}+\left[-e^2\frac{x^3}{3}+2x\right]_{e^{-1}}^{\sqrt{2}e^{-1}}=\left[0+e^{-2}\right]+\left[\frac{4\sqrt{2}}{3e}-\frac{5}{3e}\right]\Rightarrow$$

$$S=e^{-2}+\frac{4\sqrt{2}-5}{3e}\simeq 0{,}216.$$ (dove il primo integrale è calcolato "per parti")

3. Consideriamo (per semplificare i calcoli) $a=1$ e studiamo la funzione:

$$h(x)=\ln x-x^2$$

<u>*Dominio*</u>: $[0;+\infty[$,

<u>*Intersezioni con gli assi*</u>:

Non si hanno intersezioni con l'asse delle $x$ (l'equazione $\ln x=x^2$ non ha soluzioni per l'osservazione di cui al punto 1) e neppure con l'asse $y$ non si ha ($x>0$)

<u>*Studio del segno:*</u> Dalla rappresentazione grafica si ha che $\ln x<x^2$ per ogni $x \Rightarrow f(x)<0,\ \forall x\in R$.

<u>*Comportamento agli estremi del dominio:*</u>

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \ln x - x^2 = -\infty$ e inoltre $\lim_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$ (poiché $x^2$ è infinito di ordine superiore).

*Eventuali asintoti:*

Poiché $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \ln x - x^2 = -\infty$ la funzione presenta un asintoto (a sinistra della funzione) e da $\lim_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$ ricaviamo che non vi sono asintoti orizzontali.

Proviamo se vi sono asintoti obliqui; poiché $m = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\ln x - x^2}{x} = -\infty$, non vi saranno asintoti obliqui.

*Derivata prima:*

$h'(x) = \frac{1}{x} - 2x = \frac{1-2x^2}{x}$ che si annulla per $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ (la sol. negativa non è accettabile)

*Crescita e decrescita*:

$h'(x) = \frac{1-2x^2}{x} > 0$ per $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} \simeq -0{,}85\right)$ è un punto di massimo relativo.

*Derivata seconda:*

$h''(x) = -\frac{1+2x^2}{x^2}$ che non si annulla mai..

*Concavità e convessità:*

$h''(x) = -\frac{1+2x^2}{x^2} > 0$ non è mai verificata per cui la funzione è sempre convessa (volge sempre la concavità verso il basso).