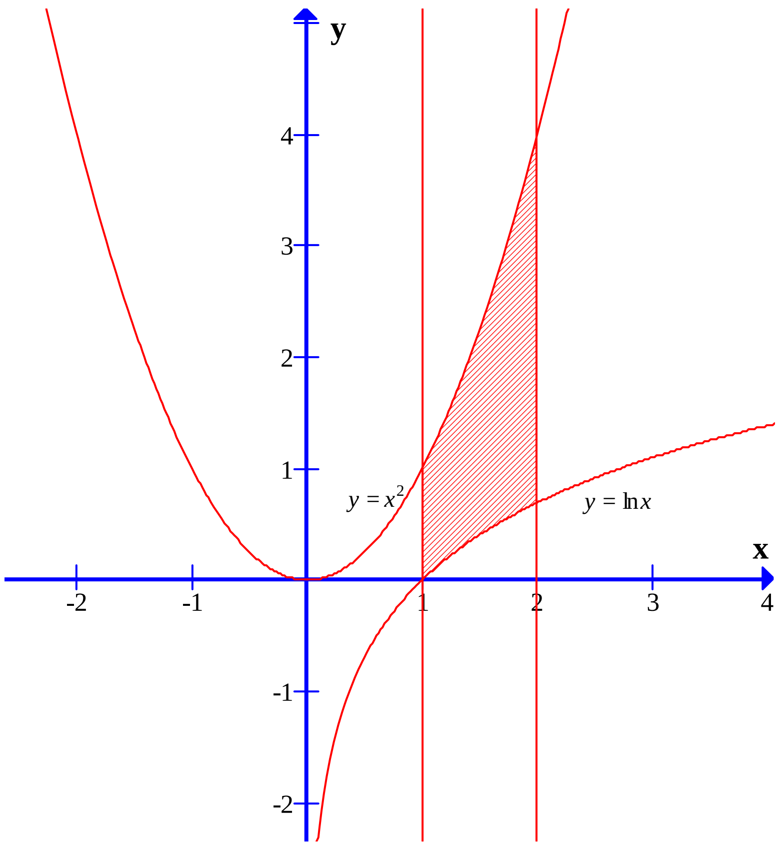
Soluzione Problema 2 ordinamento

1. Intanto notiamo che la $g(x)$ è una parabola di vertice O (origine degli assi) con concavità rivolta verso l'alto per $a>0$ (che si "contrae" rispetto all'asse x all'aumentare del valore di a), con concavità rivolta verso il basso per $a<0$ e degenera in una retta (asse delle ascisse) per $a=0$.
Ricordiamo inoltre che due curve sono tangenti tra di loro se hanno una retta tangente in comune; pertanto per determinare il valore del parametro a per cui i grafici delle funzioni $f(x)=\ln x$ (così indicheremo da questo momento la funzione $f(x)=\log x$ in base e) e $g(x)=ax^2$, risultano tangenti, basterà risolvere il sistema: $\begin{cases} f'(x)=g'(x) \\ f(x)=g(x) \end{cases}$.
Calcoliamo intanto le due derivate prime; si ottiene:
$$f'(x)=\frac{1}{x} \text{ e } g'(x)=2ax$$
Dall'uguaglianza di tali derivate (coefficienti angolari nel punto comune di ascissa x) si ha:
$$\frac{1}{x}=2ax \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2a}}.$$
Sostituito tale valore nell'equazione della parabola otteniamo:
$$g(x)=g\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)=a\cdot\frac{1}{2a}=\frac{1}{2}=\ln x=f(x) \text{ e quindi } \ln x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$
Ne segue che $T\left(\sqrt{e};\frac{1}{2}\right)$ è il punto di tangenza ed
$$f'(\sqrt{e})=\frac{1}{\sqrt{e}}=2a\sqrt{e}=g'(\sqrt{e})\Rightarrow a=\frac{1}{2e}$$
Quindi, per quanto osservato precedentemente, l'equazione $\ln x=ax^2$ ammette: -
   - una soluzione per $a\le 0$;
   - due soluzioni distinte per $0<a<\frac{1}{2e}$
   - due soluzioni coincidenti per $a=\frac{1}{2e}$
   - nessuna soluzione per $a>\frac{1}{2e}$

   2.



2. Posto $a=1>\frac{1}{2e}$, si ha che la funzione $g(x)=x^2$ è maggiore (sta al di sopra) della $f(x)=\ln x$, $\forall x>0$ e quindi l'area (tratteggiata in figura) si ottiene integrando $g-f$ tra 1 e 2; precisamente
$$A=\int_1^2\left(x^2-\ln x\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-x\ln x+x\right]_1^2=\frac{8}{3}-2\ln 2+2-\frac{1}{3}+0-1=\frac{10}{3}-2\ln 2\simeq 1{,}947$$
3. Consideriamo (per semplificare i calcoli) $a=1$ e studiamo la funzione:
$$h(x)=\ln x-x^2$$
<u>Dominio</u>: $[0;+\infty[$,
<u>Intersezioni con gli assi</u>:
Non si hanno intersezioni con l'asse delle x (l'equazione $\ln x=x^2$ non ha soluzioni per l'osservazione di cui al punto 1) e neppure con l'asse y non si ha ($x>0$)

Studio del segno: Dalla rappresentazione grafica si ha che $\ln x < x^2$ per ogni $x \Rightarrow f(x) < 0,\ \forall x \in R$.

Comportamento agli estremi del dominio:

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ln x - x^2 = -\infty$ e inoltre $\lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$ (poiché x^2 è infinito di ordine superiore).

Eventuali asintoti:

Poiché $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ln x - x^2 = -\infty$ la funzione presenta un asintoto (a sinistra della funzione) e da $\lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$ ricaviamo che non vi sono asintoti orizzontali.

Proviamo se vi sono asintoti obliqui; poiché $m = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{\ln x - x^2}{x} = -\infty$, non vi saranno asintoti obliqui.

Derivata prima:

$h'(x) = \dfrac{1}{x} - 2x = \dfrac{1-2x^2}{x}$ che si annulla per $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (la sol. negativa non è accettabile)

Crescita e decrescita:

$h'(x) = \dfrac{1-2x^2}{x} > 0$ per

$0 < x < \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$M\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; h\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{\ln 2}{2} - \dfrac{1}{2} \simeq -0{,}85\right)$

è un punto di massimo relativo.

Derivata seconda:

$h''(x) = -\dfrac{1+2x^2}{x^2}$ che non si annulla mai.

Concavità e convessità:

$h''(x) = -\dfrac{1+2x^2}{x^2} > 0$ non è mai verificata per cui la funzione è sempre convessa (volge sempre la concavità verso il basso).