

QUESTIONARIO 6-10

Quesito 6

Per il Teorema di Rolle una funzione polinomiale di grado n , sempre continua e sempre derivabile in \mathbb{R} e che ammette al più n soluzioni reali x_i ($i=1, \dots, n$) con $f(x_i)=0$, avrà almeno un punto $c_i \in]x_i, x_{i+1}[$ ($i=1, \dots, n-1$) tale che $f'(c_i)=0$.

Nel nostro caso il polinomio $f(x) = x^n + px + q$ avrà derivata prima $f'(x) = nx^{n-1} + p$ che si annullerà al più una volta se $n-1$ è dispari (cioè n pari) e si annullerà al più due volte se $n-1$ è pari (cioè n dispari). Di conseguenza:

- Se n pari esiste al massimo un intervallo $]x_1, x_2[$ per cui $f(x_i)=0$ ($i=1,2$) e cioè due soluzioni;
- Se n dispari esistono al massimo due intervalli $]x_1, x_2[$ e $]x_2, x_3[$ per cui $f(x_i)=0$ ($i=1,2,3$) e cioè tre soluzioni.

Quesito 7

Data la funzione $f(x) = e^x - \sin x - 3x$, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \sin x - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - \frac{\sin x}{x} - \frac{3x}{x} \right) = +\infty(+\infty - 0 - 3) = +\infty, \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - \sin x - 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - \frac{\sin x}{x} - \frac{3x}{x} \right) = -\infty(0 - 0 - 3) = +\infty.$$

Poiché inoltre la funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo $[0, 1]$ e risulta:

$$f(0) = 1 > 0$$

$$f(1) = e - \sin 1 - 3 = 2,718 - 0,841 - 3 = -1,123 < 0,$$

cioè agli estremi dell'intervallo $[0, 1]$ assume valori di segno opposto, allora per il "teorema degli zeri" la funzione si annulla in almeno un punto interno all'intervallo.

Quesito 8

La funzione $f(x) = 3x + \ln x$ (il logaritmo si ritiene possa essere considerato a base e), definita per $x > 0$, è strettamente crescente, e quindi invertibile, poiché

la sua derivata prima $f'(x) = 3 + \frac{1}{x}$ è sempre positiva

in quanto somma di quantità positive ($x > 0$).

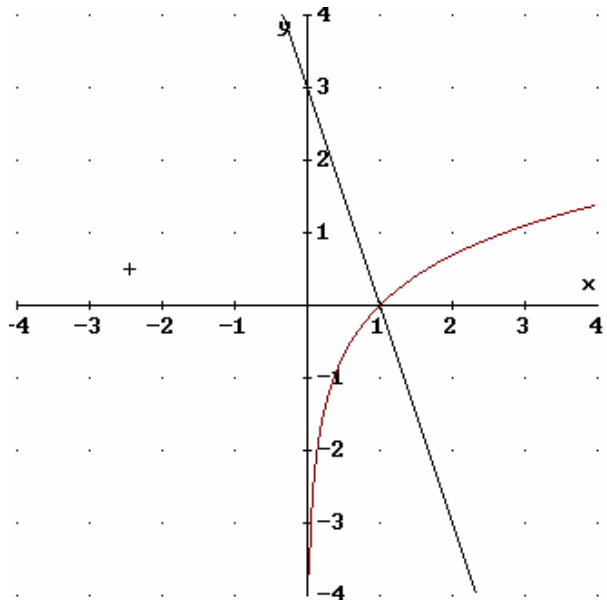
Per il teorema della funzione inversa si ha:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \text{ con } x_0 \text{ da determinare risolvendo}$$

graficamente l'equazione $f(x_0) = y_0$ e

cioè $3 = 3x + \ln x$ o meglio $3 - 3x = \ln x$. Si ottiene, come si ricava anche dal grafico riportato, che si ha $x_0 = 1$.

$$\text{Ne segue infine: } g'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3 + \frac{1}{1}} = \frac{1}{4}.$$



Quesito 9

Considerata la funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t) dt = x \cos \pi x$, per il teorema di Torricelli si ha:

$$F'(x) = f(x) = \cos \pi x - \pi x \sin \pi x, \text{ da cui } f(4) = \cos 4\pi - 4\pi \sin 4\pi = 1.$$

Quesito 10

Ricordiamo che una similitudine è sempre la composizione di un'omotetia e di una isometria prese in qualunque ordine e che l'omotetia, ha sempre un punto unito (centro dell'omotetia) e infinite rette unite (fascio di rette a centro proprio passanti per il punto unito).

Prendendo in considerazione i triangoli possiamo affermare che due triangoli omotetici hanno gli angoli uguali, i lati in proporzione e paralleli tra di loro; due triangoli simili hanno gli angoli uguali e i lati in proporzione. Ne segue che due triangoli omotetici sono anche simili, ma non viceversa.