

## QUESTIONARIO 6-10

### Quesito 6

Per il Teorema di Rolle una funzione polinomiale di grado  $n$ , sempre continua e sempre derivabile in  $\mathbb{R}$  e che ammette al più  $n$  soluzioni reali  $x_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) con  $f(x_i)=0$ , avrà almeno un punto  $c_i \in ]x_i, x_{i+1}[$  ( $i=1, \dots, n-1$ ) tale che  $f'(c_i)=0$ .

Nel nostro caso il polinomio  $f(x) = x^n + px + q$  avrà derivata prima  $f'(x) = nx^{n-1} + p$  che si annullerà al più una volta se  $n-1$  è dispari (cioè  $n$  pari) e si annullerà al più due volte se  $n-1$  è pari (cioè  $n$  dispari). Di conseguenza:

- Se  $n$  pari esiste al massimo un intervallo  $]x_1, x_2[$  per cui  $f(x_i)=0$  ( $i=1,2$ ) e cioè due soluzioni;
- Se  $n$  dispari esistono al massimo due intervalli  $]x_1, x_2[$  e  $]x_2, x_3[$  per cui  $f(x_i)=0$  ( $i=1,2,3$ ) e cioè tre soluzioni.

### Quesito 7

Data la funzione  $f(x) = e^x - \sin x - 3x$ , si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \sin x - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{e^x}{x} - \frac{\sin x}{x} - \frac{3x}{x} \right) = +\infty(+\infty - 0 - 3) = +\infty, \text{ e}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - \sin x - 3x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( \frac{e^x}{x} - \frac{\sin x}{x} - \frac{3x}{x} \right) = -\infty(0 - 0 - 3) = +\infty.$$

Poiché inoltre la funzione  $f(x)$  è continua nell'intervallo  $[0, 1]$  e risulta:

$$f(0) = 1 > 0$$

$$f(1) = e - \sin 1 - 3 = 2,718 - 0,841 - 3 = -1,123 < 0,$$

cioè agli estremi dell'intervallo  $[0, 1]$  assume valori di segno opposto, allora per il "teorema degli zeri" la funzione si annulla in almeno un punto interno all'intervallo.

### Quesito 8

La funzione  $f(x) = 3x + \ln x$  (il logaritmo si ritiene possa essere considerato a base  $e$ ), definita per  $x > 0$ , è strettamente crescente, e quindi invertibile, poiché

la sua derivata prima  $f'(x) = 3 + \frac{1}{x}$  è sempre positiva

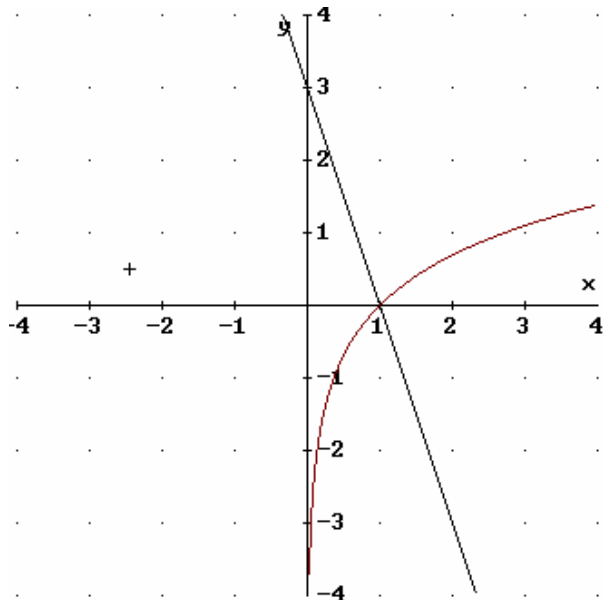
in quanto somma di quantità positive ( $x > 0$ ).

Per il teorema della funzione inversa si ha:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \text{ con } x_0 \text{ da determinare risolvendo}$$

graficamente l'equazione  $f(x_0) = y_0$  e cioè  $3 = 3x + \ln x$  o meglio  $3 - 3x = \ln x$ . Si ottiene, come si ricava anche dal grafico riportato, che si ha  $x_0 = 1$ .

$$\text{Ne segue infine: } g'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3 + \frac{1}{1}} = \frac{1}{4}.$$



**Quesito 9**

Considerata la funzione integrale  $F(x) = \int_0^x f(t) dt = x \cos \pi x$ , per il teorema di Torricelli si ha:

$$F'(x) = f(x) = \cos \pi x - \pi x \sin \pi x, \text{ da cui } f(4) = \cos 4\pi - 4\pi \sin 4\pi = 1.$$

**Quesito 10**

Ricordiamo che una similitudine è sempre la composizione di un'omotetia e di una isometria prese in qualunque ordine e che l'omotetia, ha sempre un punto unito (centro dell'omotetia) e infinite rette unite (fascio di rette a centro proprio passanti per il punto unito).

Prendendo in considerazione i triangoli possiamo affermare che due triangoli omotetici hanno gli angoli uguali, i lati in proporzione e paralleli tra di loro; due triangoli simili hanno gli angoli uguali e i lati in proporzione. Ne segue che due triangoli omotetici sono anche simili, ma non viceversa.